Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 1 (2014), 41-58

Prace Koła Matematyków
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2014)

Barbara Ciesielska[1], *Agnieszka Kowalczyk*[2]

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym i jego zastosowania

Streszczenie. Twierdzenie o punkcie stałym, które po raz pierwszy zostało sformułowane przez Stefana Banacha w 1922 roku, ma szerokie zastosowanie w matematyce: od abstrakcyjnych dowodów innych twierdzeń po zadania aproksymacyjne w analizie numerycznej. Twierdzenie to zostało tu zaprezentowane wraz z dowodami i z kilkoma przykładami zastosowań m.in.: w algebrze (pierwiastki kwadratowe w algebrach Banacha) i w geometrii fraktalnej (zbiory samopodobne).

Abstract. The fixed-point theorem, which was first stated by Stefan Banach in 1922, has a wide variety of applications: from abstract proofs of other theorems to the approximation tasks in numerical analysis. This theorem has been presented with its proofs and a few illustrative applications, including computing square roots in Banach algebra and in the theory of self-similar sets.

1. Wstęp

1.1. Krótki zarys historyczny

Twierdzenie o punktach stałych zostało po raz pierwszy wypowiedziane (w kontekście stwierdzenia istnienia rozwiązania równania całkowego) w pracy Stefana Banacha z 1922 roku. Dlatego twierdzenie to często nazywane jest **zasadą odwzorowań zwężających Banacha**, a dzięki swojej prostocie znalazło wiele zastosowań w różnych gałęziach matematyki: jest nie tylko popularnym narzędziem w analizie matematycznej, ale również w analizie numerycznej (zagadnienia aproksymacji). Zanim jednak przejdziemy do udowodnienia zasady odwzorowań zwęża-

AMS (2010) Subject Classification: 26B10, 28A80, 34A12, 46A30, 46H99, 54H25.
Słowa kluczowe: Banach fixed point theorem, Edelstein fixed point theorem, Banach algebra, self–similar sets, Hausdorff distance, fractals, Cauchy problem, open mapping theorem, implicit function theorem.

jących Banacha, poświęcimy trochę miejsca powtórzeniu teorii niezbędnej do pełniejszego zrozumienia przedstawionych w niniejszej pracy rozumowań.

1.2. Powtórka teorii

Definicja 1
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ zawarty w naszej przestrzeni jest *ciągiem Cauchy'ego względem metryki* d, jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Uwaga 2
W przestrzeni metrycznej (X, d) ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.

Definicja 3
Przestrzeń metryczna (X, d) jest *zupełna*, gdy każdy ciąg Cauchy'ego w (X, d) jest zbieżny do punktu w tej przestrzeni.

Uwaga 4
W przestrzeni metrycznej (X, d) zwartość i ciągowa zwartość to pojęcia równoważne.

Definicja 5
Przestrzeń metryczną X nazywamy *ciągowo zwartą*, jeżeli z każdego ciągu o wyrazach w X możemy wybrać podciąg zbieżny (w X).

Definicja 6
Niech (X, d) oraz (Y, ϱ) będą przestrzeniami metrycznymi.
Funkcję $f\colon (X, d) \to (Y, \varrho)$ nazywamy *spełniającą warunek Lipschitza*, jeśli:

$$\exists k \geq 0 \ \forall x, y \in X\colon \varrho(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

W niniejszej pracy będziemy rozważać jednak odwzorowania idące z pewnej przestrzeni metrycznej w nią samą. W takiej sytuacji powyższa definicja dla przestrzeni metrycznej (M, ϱ) i przekształcenia $T\colon M \to M$ wygląda następująco:

$$\exists k \geq 0 \ \forall x, y \in M\colon \varrho(Tx, Ty) \leq k \varrho(x, y). \tag{1}$$

Uwaga 7
Warto również nadmienić, iż:

- funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest funkcją ciągłą,
- najmniejszą stałą k, dla której zachodzi warunek Lipschitza dla zadanego odwzorowania T, nazywamy *stałą Lipschitza* i oznaczamy $k(T)$,
- zachodzi następująca własność (zwana *multiplikatywnością*) dla danych przekształceń $S, T\colon M \to M$, gdzie M jest przestrzenią metryczną:

  $$k(T \circ S) \leq k(T) k(S), \tag{2}$$

  w szczególności

  $$k(T^n) \leq k^n(T), \ n = 1, 2, \dots .$$

Definicja 8
Niech (M, ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Przekształcenie $T\colon M \to M$ nazywamy *kontrakcją*, jeśli $0 \le k(T) < 1$.

Definicja 9
Niech (M, ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Przekształcenie $T\colon M \to M$ nazywamy *kontrakcyjnym*, jeśli $\varrho(Tx, Ty) < \varrho(x, y)$ dla takich $x, y \in M$, że $x \neq y$.

Definicja 10
Mówimy, że dwie metryki ϱ i r określone na danym zbiorze M są *porównywalne*, jeśli istnieją takie dwie stałe dodatnie a, b, że dla wszystkich $x, y \in M$,

$$ar(x, y) \le \varrho(x, y) \le br(x, y). \tag{3}$$

Uwaga 11
Metryki porównywalne są metrykami równoważnymi (czyli zadają tę samą topologię na zbiorze).

Definicja 12
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. *Średnicą przestrzeni* (X, d) nazywamy liczbę $\operatorname{diam}_d X = \begin{cases} 0 & \text{gdy} X = \emptyset \\ \sup\limits_{x,y\in X} d(x,y), & \text{gdy } X \neq \emptyset \end{cases}$.

Twierdzenie 13 (Cantora o zstępującym ciągu)
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną, a $F_1, F_2, F_3, \ldots \subset X$ zstępującym ciągiem niepustych zbiorów domkniętych, czyli spełniającym warunki:

- $\forall n\ F_n \neq \emptyset$,
- $\forall n\ F_n = \overline{F_n}$,
- $\forall n\ F_n \supset F_{n+1}$,
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \ge 1\ diam_d F_n \le \varepsilon$.

Wtedy $\sharp(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n) = 1$.

2. Zasada odwzorowań zwężających Banacha: wypowiedź i dowody

Twierdzenie 14 (zasada odwzorowań zwężających Banacha)
Niech (M, ϱ) będzie przestrzenią metryczną zupełną, a odwzorowanie $T\colon M \to M$ kontrakcją (zatem jest lipschitzowskie, a więc i ciągłe). Wtedy T ma w M dokładnie jeden punkt stały i dla wszystkich $x_0 \in M$ ciąg iteracji $\{T^n x_0\}$ dąży do tego punktu stałego.

Przedstawimy teraz trzy dowody Twierdzenia 14. Pierwszy z nich nie podaje konstrukcji punktu stałego, a wykazuje tylko jego istnienie. Jednakże warto go przytoczyć, ponieważ jest przykładem zastosowania twierdzenia Cantora o zstępującym ciągu. Drugi dowód jest wariantem dowodu oryginalnego, dlatego tak jak w oryginale, podaje on zarówno istnienie punktu stałego, jak i metodę jego aproksymacji. Na końcu omówimy dowód Banacha.

Dowód. Niech $a = \inf\{\varrho(x, Tx)\colon x \in M\}$, zaś $k = k_\varrho(T)$. Pokażemy, że $a = 0$. Wybierając dowolne $\varepsilon > 0$ i biorąc takie $x \in M$, że $\varrho(x, Tx) \leq a + \varepsilon$, otrzymujemy następujące nierówności:

$$0 \leq a \leq \varrho(Tx, T^2x) \leq k\varrho(x, Tx) \leq k(a + \varepsilon).$$

Ponieważ $k < 1$ (T to kontrakcja), a ε może być dowolnie małe, więc $a = 0$. Zwróćmy uwagę, że dla każdego $\varepsilon > 0$ zbiór

$$M_\varepsilon = \{x \in M\colon \varrho(x, Tx) \leq \varepsilon\}$$

jest niepusty i domknięty. Ponadto dla wszystkich $x, y \in M_\varepsilon$,

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, Tx) + \varrho(Tx, Ty) + \varrho(Ty, y) \leq 2\varepsilon + k\varrho(x, y),$$

skąd otrzymujemy:

$$\varrho(x, y) \leq \frac{2\varepsilon}{1-k},$$

a co za tym idzie: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \operatorname{diam} M_\varepsilon = 0$.
Ponieważ $\{M_\varepsilon\}$ jest zstępującą rodziną zbiorów przy ε zbiegającym do zera, możemy skorzystać z twierdzenia Cantora wspomnianego na początku. Zatem $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} M_\varepsilon$ zawiera dokładnie jeden punkt x_0, który jest punktem stałym dla przekształcenia T (zachodzi $x_0 = Tx_0$).

Dowód. Dla $x \in M$ zdefiniujemy funkcję $\varphi(x) = (1-k)^{-1}\varrho(x, Tx)$, gdzie $k = k_\varrho(T)$. Korzystając wówczas z warunku Lipschitza, mamy oszacowanie:

$$\varrho(x, Tx) - k\varrho(x, Tx) \leq \varrho(x, Tx) - \varrho(Tx, T^2x).$$

Po uporządkowaniu i podstawieniu otrzymujemy:

$$(1-k)\varrho(x, Tx) \leq \varrho(x, Tx) - \varrho(Tx, T^2x),$$

$$\varrho(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx), x \in M. \tag{4}$$

Dlatego dla $x_0 \in M$ oraz takich $n, m \in \mathbb{N}$, że $n < m$ mamy:

$$0 \le \varrho(T^n x_0, T^{m+1} x_0) \le \sum_{i=n}^{m} \varrho(T^i x_0, T^{i+1} x_0) \le \varphi(T^n x_0) - \varphi(T^{m+1} x_0). \tag{5}$$

W szczególności: $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \varrho(T^i x_0, T^{i+1} x_0) < +\infty$. To znaczy, że $\{T^n x_0\}$ jest ciągiem Cauchy'ego i – wobec ciągłości T – dąży do punktu stałego x przekształcenia T. Szybkość tej zbieżności możemy otrzymać z nierówności (5), biorąc $m \to \infty$:

$$\varrho(T^n x_0, x) \le \varrho(T^n x_0) = (1-k)^{-1} \varrho(T^n x_0, T^{n+1} x_0) \le \frac{k^n}{1-k} \varrho(x_0, T x_0). \tag{6}$$

Jeśli ostatnią nierówność ograniczymy dodatkowo przez zadany ε, będziemy wtedy w stanie określić, ile iteracji należy wykonać, aby znaleźć się od rozwiązania na błąd epsilonowy. Jest to niezwykle ważne w teorii aproksymacji.

Teraz pokażemy, że x jest jedynym punktem stałym przekształcenia T. Zwróćmy uwagę na następujący fakt:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T x_n = T x.$$

Gdybyśmy mieli dwa punkty stałe, czyli $x = Tx$ i $y = Ty$, to (wobec lipschitzowskości T) zachodziłaby poniższa nierówność:

$$\varrho(x, y) = \varrho(Tx, Ty) \le k \varrho(x, y),$$

z której wynika, że $\varrho(x, y) = 0$.

Uwaga 15
Powyższy dowód ukazuje, że wszystkie ciągłe przekształcenia spełniające nierówność (4) *z dowolną ciągłą funkcją* $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^+$ *muszą mieć punkty stałe.*

Przedstawimy teraz trzecią wersję dowodu zasady odwzorowań zwężających Banacha.

Dowód. Weźmy $x_0 \in M$ i określmy ciąg iteracyjny $\{x_n\}$ następująco: $x_{n+1} = T x_n$ (czyli $x_n = T^n x_0$), $n = 0, 1, 2, \ldots$. Należy spostrzec, że dla wszystkich $n, p \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \varrho(x_n, x_{n+p}) &= \varrho(T^n x_0, T^{n+p} x_0) \\ &= \varrho(T^n x_0, T^n \circ T^p x_0) \\ &\le k(T^n) \varrho(x_0, T^p x_0) \\ &\le k^n [\varrho(x_0, T x_0) + \varrho(T x_0, T^2 x_0) + \ldots + \varrho(T^{p-1} x_0, T^p x_0)] \\ &\le k^n (1 + k + \ldots + k^{p-1}) \varrho(x_0, T x_0) = k^n (\frac{1-k^p}{1-k}) \varrho(x_0, T x_0). \end{aligned} \tag{7}$$

Wiemy stąd, że $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego, a ponieważ M jest przestrzenią zupełną, istnieje taki punkt $x \in M$, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Pokażmy jeszcze, że x jest jedynym punktem stałym przekształcenia T. Analogicznie do poprzedniego dowodu, mamy:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx.$$

Gdybyśmy mieli dwa punkty stałe, czyli $x = Tx$ i $y = Ty$, to wobec spełnienia warunku Lipschitza przez T zachodzi nierówność:

$$\varrho(x,y) = \varrho(Tx,Ty) \leq k\varrho(x,y),$$

implikująca $\varrho(x,y) = 0$.
Znowuż, aby otrzymać szybkość zbieżności, kładziemy w (7) $p \to \infty$, otrzymując:

$$\varrho(x_n, x_0) = \varrho(T^n x_0, x) \leq \tfrac{k^n}{1-k}\varrho(x_0, Tx_0).$$

Uwaga 16
Uważny czytelnik zauważy, że założenie $k(t) < 1$ jest silniejsze, niż jest to konieczne. Wystarczyłby warunek, że $k(T^n) < 1$ dla przynajmniej jednego ustalonego $n \in \mathbb{N}$. To oznacza, że T^n jest kontrakcją i (na mocy twierdzenia 2) ma dokładnie jeden punkt stały x ($x = T^n x$). Zatem $Tx = T^{n+1}x = T^n \circ Tx$, czyli Tx jest punktem stałym odwzorowania T^n. I tak $x = Tx$, co oznacza, że x jest także punktem stałym (jedynym) przekształcenia T.

Rozwiniemy teraz ideę uwagi 16. Niech $T\colon M \to M$ będzie odwzorowaniem lipschitzowskim. A dla ustalonego $x_0 \in M$ i określmy $x_n = T^n x_0$. Odpowiednikiem oszacowania (7) dla tej ogólniejszej klasy przekształceń jest:

$$\varrho(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \varrho(T^i x_0, T^{i+1}x_0) \leq [\sum_{j=0}^{p-1} k(T^{n+j})]\varrho(x_0, Tx_0).$$

Wynika z tego, że $\{x_n\}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w przypadku, gdy:

$$\sum_{i=1}^{\infty} k(T^i) < +\infty. \tag{8}$$

Przedstawimy teraz twierdzenie pomocnicze, z którego za chwilę skorzystamy.

Lemat 17
Jeśli dana jest liczba rzeczywista nieujemna a_n (gdzie $n \in \mathbb{N}$) oraz jest spełniona nierówność $0 \leq a_{n+m} \leq a_n a_m$, wtedy istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Dowód. Zauważmy, że zachodzi następujący ciąg nierówności:

$$0 \leq a_n \leq a_{n-1}a_1 \leq a_1^n.$$

Wynika z tego, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy: $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq a_1$. Oznacza to, że: $0 \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < a_1 < +\infty$. Wprowadźmy oznaczenia: $c = \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ oraz $d = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Załóżmy, że zachodzi $c < d$. Wybierzmy $\varepsilon > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że: $\sqrt[n_0]{a_{n_0}} < c + \varepsilon < d$. Ustalmy ciąg liczb naturalnych $\{n_k\}$ taki, że: $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = d$. Zauważmy, że istnieje taka liczba naturalna l_k, że: $n_k = l_k n_0 + d_k$, gdzie $d_k \in \{0, \dots, n_0 - 1\}$. Z założenia wiemy, iż zachodzi: $a_{n_k} \leq a_{d_k} a_{l_k n_0} \leq (a_{n_0})^{l_k} a_{d_k}$. Stąd otrzymujemy: $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \leq a_{n_0}^{\frac{l_k}{l_k n_0 + d_k}} a_{d_k}^{\frac{1}{l_k n_0 + d_k}}$. Prawa strona nierówności przy $k \to \infty$ dąży do $\sqrt[n_0]{a_{n_0}}$. Zatem dochodzimy do następujących nierówności: $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \leq \sqrt[n_0]{a_{n_0}} < c + \varepsilon < d$. Otrzymaliśmy sprzeczność. Oznacza to, że $c = d$, a więc istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Posługując się powyższym lematem (a_n z lematu to u nas $k(T^n)$) oraz multiplikatywnością $k(T^n)$, tzn. korzystając z faktu, że $k(T^{n+m}) \leq k(T^n)k(T^m)$, można wykazać, że istnieje liczba $k_\infty(T)$, spełniająca:

$$k_\infty(T) = \lim_{n\to\infty} [k(T^n)]^{1/n} = \inf\{[k(T^n)]^{1/n} \colon n = 1, 2, \dots\}. \tag{9}$$

Zatem (8) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $k_\infty(T) < 1$, a więc założenie $k(T) < 1$ w Twierdzeniu 14 może być zamienione na $k_\infty(T) < 1$.

Pokażemy teraz, że dowolne przekształcenie $T \colon M \to M$, dla którego $k_\infty(T) < 1$, jest kontrakcją względem odpowiednio dobranej metryki równoważnej do metryki zadanej w M.

Dla ϱ–lipschitzowskiego przekształcenia $T \colon M \to M$ warunek (3) pociąga za sobą:

$$r(Tx, Ty) \leq \tfrac{1}{a}\varrho(Tx, Ty) \leq \tfrac{1}{a}k_\varrho(T)\varrho(x, y) \leq \tfrac{b}{a}k_\varrho(T)r(x, y).$$

Stąd $k_r(T) \leq \frac{b}{a}k_\varrho(T)$. Podobnie $k_\varrho(T) \leq \frac{b}{a}k_r(T)$, a więc dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności:

$$\tfrac{a}{b}k_\varrho(T^n) \leq k_r(T^n) \leq \tfrac{b}{a}k_\varrho(T^n).$$

W konsekwencji:

$$k_\infty(T) = \lim_{n\to\infty} [k_r(T^n)]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} [k_\varrho(T^n)]^{1/n},$$

co udowadnia, że stała $k_\infty(T)$ jest taka sama dla metryk równoważnych. Ponadto, wobec (9), $k_\infty(T) \leq k_r(T)$ dla wszystkich metryk r równoważnych metryce ϱ. Rozważmy jeszcze szereg

$$r_\lambda(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varrho(T^n x, T^n y),\ \forall \lambda \in [0, \tfrac{1}{k_\infty(T)}).$$

Jest on zbieżny i określa metrykę r_λ równoważną metryce ϱ, ponieważ:

$$\varrho(x,y) \le r_\lambda(x,y) \le [\sum_{n=0}^{\infty} k_\varrho(T^n)\lambda^n]\varrho(x,y).$$

Zachodzi zatem:

$$r_\lambda(Tx,Ty) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varrho(T^{n+1}x, T^{n+1}y) = \tfrac{1}{\lambda}[r_\lambda(x,y) - \varrho(x,y)] \le \tfrac{1}{\lambda} r_\lambda(x,y).$$

Stąd mamy nierówność: $k_{r_\lambda}(T) \le \frac{1}{\lambda}$. Przyjmując $\lambda = \frac{1}{k_\infty(T)+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, mamy:

$$k_{r_\lambda}(T) \le k_\infty(T) + \varepsilon$$

i ostatecznie:

$$k_\infty(T) = \inf k_r(T),$$

gdzie infimum jest wzięte po wszystkich metrykach r równoważnych metryce ϱ.

Założenie $k(T) < 1$ w twierdzeniu można zatem zastąpić warunkiem $k_\infty < 1$. Wybór odpowiedniej metryki jest w pewnych przypadkach pomocny w zastosowaniach, bo może dać ładne oszacowania tempa zbieżności ciągu iteracji.

3. Twierdzenie Edelsteina i jego dowód

Twierdzenie 18 (Edelstein [1962])
Niech (M,ϱ) będzie zwartą przestrzenią metryczną, a przekształcenie $T\colon M \to M$ kontrakcyjne. Wtedy T ma dokładnie jeden punkt stały w M i dla wszystkich $x_0 \in M$ ciąg iteracji $\{T^n x_0\}$ jest zbieżny do tego punktu stałego.

Dowód. Funkcja $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^+$ dana wzorem $\varphi(y) = \varrho(y, Ty)$ jest ciągła na przestrzeni zwartej M, a więc osiąga swoje minimum, przypuśćmy że w punkcie $x \in M$. Jeśli $x \ne Tx$, to $\varphi(Tx) = \varrho(Tx, T^2x) < \varrho(x, Tx)$ – sprzeczność. W związku z tym wiemy, że $x = Tx$. Niech teraz $x_0 \in M$ i weźmy $a_n = \varrho(T^n x_0, x)$. Zachodzi:

$$a_{n+1} = \varrho(T^{n+1}x_0, x) = \varrho(T^{n+1}x_0, Tx) \le \varrho(T^n x_0, x) = a_n,$$

więc $\{a_n\}$ jest nierosnącym ciągiem nieujemnych liczb rzeczywistych i ma wobec tego granicę, którą oznaczymy a. Ciąg $\{T^n x_0\}$ ma, wobec zwartości przestrzeni, zbieżny podciąg $\{T^{n_k} x_0\}$; niech $\lim_{k\to\infty} T^{n_k} x_0 = z$. Naturalnie $\varrho(z,x) = a$. Jeśli $a > 0$, to dochodzimy do sprzeczności, ponieważ:

$$a = \lim_{k\to\infty} \varrho(T^{n_k+1}x_0, x) = \varrho(Tz, x) = \varrho(Tz, Tx) < \varrho(z,x) = a.$$

Wynika z tego, że $a = 0$. Wnioskujemy zatem, że dowolny zbieżny podciąg ciągu $\{T^n x_0\}$ musi dążyć do x i, na mocy zwartości, $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x$.

Wyniki pracy Banacha zainspirowały wielu matematyków do ich dalszej analizy. Dzięki temu mamy dzisiaj dostęp do licznych uogólnień i modyfikacji zasady odwzorowań zwężających Banacha, o czym przeczytamy w następnym rozdziale.

4. Uogólnienia i modyfikacje twierdzenia o punkcie stałym

Definicja 19
Dana jest przestrzeń metryczna (X, ϱ). Weźmy $x_0 \in X$.
Mówimy, że funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest *półciągła z dołu (odp. z góry) w punkcie* x_0, gdy

$$\liminf_{\varrho(x,x_0)\to 0} f(x) \geq f(x_0)$$

$$(\text{odp. } \limsup_{\varrho(x,x_0)\to 0} f(x) \leq f(x_0)).$$

Będziemy teraz chcieli wypowiedzieć i udowodnić twierdzenie Caristiego. Jego oryginalny dowód wykorzystuje indukcję pozaskończoną. Znane są też eleganckie dowody oparte na lemacie Kuratowskiego–Zorna. My w dowodzie tego twierdzenia posłużymy się poniższym wynikiem pracy Brezisa i Browdera z 1976 roku.

Twierdzenie 20 (Brezis, Browder [1976])
Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, a $\psi : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunki:

- $x \leq y$ *i* $x \neq y \Rightarrow \psi(x) < \psi(y)$,
- *dla dowolnego rosnącego ciągu $\{x_n\}$ elementów zbioru X takiego, że $\psi(x_n) \leq C < \infty$ dla wszystkich n, istnieje $y \in X$ takie, że $x_n \leq y$ dla wszystkich n,*
- *dla dowolnego $x \in X$, $\psi(S(x))$ jest ograniczone z góry (gdzie dla $x \in X$: $S(x) = \{y \in X : y \geq x\}$.*

Wtedy dla każdego $x \in X$ istnieje takie $x' \in S(x)$, że x' jest elementem maksymalnym, tzn. $\{x'\} = S(x')$.

Twierdzenie 21 (Caristi [1976])
Niech (M, ϱ) będzie zupełną przestrzenią metryczną i niech $\varphi : M \to \mathbb{R}$ będzie funkcją półciągłą, ograniczoną z dołu. Załóżmy, że $T : M \to M$ jest dowolnym przekształceniem spełniającym warunek:

$$\varrho(u, T(u)) \leq \varphi(u) - \varphi(T(u)), u \in M.$$

Wówczas T ma punkt stały.

Dowód. Zdefiniujmy nową funkcję $\psi = -\varphi$. Niech dla $x, y \in M$ zachodzi $x \leq y$, jeśli $\varrho(x,y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$. Zauważmy, że relacja ta wprowadza częściowy porządek w M. Spełnione są bowiem warunki dla dowolnych $a, b, c \in M$:

- zwrotności: $0 = \varrho(a,a) \leq \varphi(a) - \varphi(a) = 0$,
- antysymetrii: $[\varrho(a,b) \leq \varphi(a) - \varphi(b)] \ \wedge \ [\varrho(b,a) \leq \varphi(b) - \varphi(a)] \Longrightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Longrightarrow \varrho(a,b) = 0 \Longrightarrow a = b$, gdzie pierwsza implikacja wynika z własności metryki: dla dowolnych $a, b \in M$ zawsze zachodzi $\varrho(a,b) \geq 0$,
- przechodniości: $\varrho(a,c) \leq \varrho(a,b) + \varrho(b,c) \leq \varphi(a) - \varphi(b) + \varphi(b) - \varphi(c) \leq \varphi(a) - \varphi(c)$.

Wiemy, że na pewno $\varphi(u) \leq \varphi(T(u))$. Na mocy założenia zachodzi $u \leqslant T(u)$ dla każdego $u \in M$. Chcemy skorzystać z twierdzenia Brezisa i Browdera. Żeby to zrobić, należy najpierw sprawdzić trzy warunki z tegoż twierdzenia dla ψ.

Warunek pierwszy jest oczywisty, ponieważ:

$$x \leq y \wedge x \neq y \Longrightarrow \varphi(y) < \varphi(x),$$

czyli

$$x \leq y \wedge x \neq y \Longrightarrow \psi(x) < \psi(y).$$

Przejdźmy do sprawdzenia warunku drugiego. Należy spostrzec, że jeśli $\{x_n\}$ jest dowolnym ciągiem rosnącym, to ciąg $\{\varphi(x_n)\}$ jest malejący i ograniczony z dołu, czyli zbieżny (powiedzmy do $r \in \mathbb{R}$).To oznacza, że $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Na mocy zupełności przestrzeni ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do pewnego punktu $y \in M$. Z uwagi na półciągłość funkcji φ mamy:

$$\varrho(x_n, y) \leq \varphi(x_n) - r \leqslant \varphi(x_n) - \varphi(x).$$

Wnioskujemy stąd, że $x_n \leq y$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Co do ostatniego warunku, zauważmy, iż jeśli φ jest ograniczona z dołu, to ψ jest ograniczona z góry. Dla wszystkich $x \in X$ istnieje zatem takie $x' \geq x$, że $\{x'\} = S(x')$. Ponieważ dla dowolnego $u \in M$ zachodzi $u \leq T(u)$, dotyczy to również x'. Mamy więc $x' \leq T(x')$. Ale x' jako jedyny spełnia ostatnią nierówność. Czyli $T(x') = x'$.

5. Zastosowania

Wymyślone w 1922 roku przez Stefana Banacha twierdzenie o punkcie stałym (o kontrakcji), pierwotnie zastosowane w celu rozwiązania równania całkowego, znalazło z czasem wiele różnorodnych zastosowań, zarówno w dowodach innych własności, jak i w bardziej praktycznych rzeczach. Przykładowe zastosowania tw. Banacha:

- w dowodach:
  - tw. o funkcji uwikłanej (analiza matematyczna),

  - tw. Caristiego (teoria porządku),
  - tw. Mengera (grafy),
  - kryterium zbieżności metody Gaussa-Seidla (analiza numeryczna),
  - tw. Picarda o jednoznaczności (równania różniczkowe),
  - metoda Newtona (analiza numeryczna),
  - tw. o odwzorowaniu otwartym (analiza nieskończona),

- praktyczne:
  - przekształcenia holomorficzne (analiza zespolona),
  - rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (równania różniczkowe),
  - zbiory samopodobne (geometria fraktalna),
  - pierwiastki kwadratowe w algebrach Banacha i funkcjach, rzeczywistych (algebra).

5.1. Pierwiastki kwadratowe w algebrach Banacha

DEFINICJA 22
Algebrą Banacha nazywamy niepusty zbiór X o następujących właściwościach:

- będący przestrzenią Banacha (unormowaną i zupełną),
- będący algebrą nad ciałem $\mathbb{R}$, tzn. dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ i dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$:
  - $(xy)z = x(yz)$,
  - $x(y + z) = xy + xz$,
  - $(y + z)x = yx + zx$,
  - $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$,
- spełniający nierówność normową $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

UWAGA 23
Przykładami algebr Banacha są:

- *zbiór odwzorowań liniowych: $\mathcal{L}(X, X)$, który w naturalny sposób spełnia wszystkie warunki, w szczególności nierówność normową, tzn. dla każdego $T, S \in \mathcal{L}(X, X)$ zachodzi $\|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$,*
- *zbiór funkcji ciągłych określonych na danym zbiorze: $\mathcal{C}(T)$ z działaniem mnożenia „po współrzędnych" $(fg)(t) = f(t) \cdot g(t)$, również spełniający wszystkie warunki, w szczególności: $\|f \circ g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$,*
- *kwaterniony z normą określoną jako moduł macierzy, $\|A\| = \sqrt{\det A}$.*

DEFINICJA 24
Jeśli (A, F) to algebra, $\emptyset \neq B \subset A$, to B nazywamy *podalgebrą* A, jeśli dla każdego $f \in F$ zbiór B jest zamknięty ze względu na f.

Definicja 25
Jeśli $z \in X$, to *podalgebrą generowaną* przez z (ozn. $X(z)$) nazywamy najmniejszą domkniętą podalgebrę algebry X zawierającą z.

Uwaga 26
Dla każdego $x, y \in X(z)$ zachodzi $xy = yx$.

Twierdzenie 27
Dla każdego takiego $z \in X$, że $\|z\| \leq 1$, gdzie X to algebra Banacha, istnieje dokładnie jeden taki $x \in X(z)$, że $\|x\| \leq 1$: $x^2 - 2x + z = 0$.

Dowód. Aby udowodnić powyższe twierdzenie, skorzystamy z twierdzenia Banacha o punkcie stałym. W tym celu musimy określić pewną funkcję. Najpierw, bez straty ogólności, bierzemy takie d, że $\|z\| < d < 1$. Następnie zadajemy takie odwzorowanie T, że $T(x) = \frac{1}{2}(x^2 + z)$, określone dla $x \in B(0,d) \subset X(z)$.

Sprawdzamy założenia twierdzenia Banacha o punkcie stałym:

- zupełność przestrzeni metrycznej $(B(0,d), \|\cdot\|)$ jest oczywista, metrykę indukujemy z danej algebry Banacha X,
- $T\colon B(0,d) \to B(0,d)$, ponieważ
$$\|T(x)\| = \|\frac{1}{2}(x^2 + z)\| \leq \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|z\|) \leq \frac{1}{2}(d^2 + d) < d,$$
- odwzorowanie T jest kontrakcją, gdyż
$\|T(x) - T(y)\| = \frac{1}{2}\|x^2 - y^2\| = \frac{1}{2}\|(x-y)(x+y)\| \leq \frac{1}{2}\|x-y\| \cdot \|x+y\| \leq \frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|)\|x-y\| \leq d\|x-y\|$, gdzie (z określenia) $0 < d < 1$.

Istnieje zatem dokładnie jeden punkt $x_0 \in B(0,d)$ będący punktem stałym odwzorowania T. Liczba $d < 1$ jest wybrana dowolnie blisko 1, więc x_0 to jedyny punkt stały odwzorowania T. Ponadto następne równości są równoważne:

$$T(x_0) = x_0,$$

$$\frac{1}{2}({x_0}^2 + z) = x_0,$$

$${x_0}^2 + z = 2x_0,$$

$${x_0}^2 - 2x_0 + z = 0.$$

Czyli x_0 jest też jedynym rozwiązaniem równania $x^2 - 2x + z = 0$ w $B(0,1)$.

Uwaga 28
Jeśli istnieje $e \in X$ takie, że $ex = xe = x$ dla każdego $x \in X$, to wtedy $(x-e)^2 = e - z$, czyli mówimy o pierwiastku kwadratowym.

Dowód. Aby udowodnić powyższe twierdzenie, wystarczy wykonać zaledwie parę prostych przekształceń:

$$x^2 - 2x + z = 0,$$
$$x^2 - 2x + z - e + e^2 = 0,$$
$$x^2 - 2ex + e^2 = e - z,$$
$$(x - e)^2 = e - z.$$

I wtedy poprzednie twierdzenie możemy sformułować następująco:

TWIERDZENIE 29 (PIERWIASTKI KWADRATOWE W ALGEBRZE BANACHA)
Dla każdego takiego $z \in X$, że $\|z\| < 1$ istnieje dokładnie jeden taki x, że $x \in X(z), \|x\| < 1$ oraz $(e - x)^2 = e - z$.

5.2. Zbiory samopodobne

Najpierw wprowadzamy kilka oznaczeń:
(M, ϱ) – przestrzeń metryczna zupełna,
$\mathcal{M}$ – rodzina niepustych, domkniętych, ograniczonych zbiorów na M,
$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ – podrodzina $\mathcal{M}$ – zbiór niepustych, domkniętych, ograniczonych, zwartych zbiorów należących do $\mathcal{M}$.

DEFINICJA 30
Niech $X, Y \in \mathcal{N}$. Definiujemy wtedy:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(X,Y) &= \sup\{\mathrm{dist}(y,X), y \in Y\},\\ \mathrm{d}(Y,X) &= \sup\{\mathrm{dist}(x,Y), x \in X\},\\ \mathrm{dist}(y,X) &= \inf\{\varrho(x,y), x \in X\},\\ \mathrm{dist}(x,Y) &= \inf\{\varrho(x,y), y \in Y\}. \end{aligned}$$

Metryką Hausdorffa nazywamy:

$$D(X,Y) = \max\{\mathrm{d}(X,Y), \mathrm{d}(Y,X)\}.$$

DEFINICJA 31
Załóżmy, że $T_1, T_2, \ldots, T_n$ – rodzina kontrakcji na M. Wówczas określamy funkcję $\mathcal{F}$ następująco: $\mathcal{F}\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}\colon \mathcal{F}(X) = \bigcup_{i=1}^{n} T_i(X)$, $X \in \mathcal{N}$.

UWAGA 32
Widać, że $\mathcal{F}$ – kontrakcja na $\mathcal{N}$ względem metryki Hausdorffa ze stałą

$$k \le \max k(T_i),\ i = 1, \ldots, n.$$

TWIERDZENIE 33
Jeśli M jest przestrzenią metryczną zwartą, a $T_i\colon M \to M$ rodziną kontrakcji, to istnieje dokładnie jeden $X \neq \emptyset$, X – zwarty, $X \subset M$, $X = \bigcup_{i=1}^{n} T_i(X)$.

Definicja 34
Jeśli M jest przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^d$, a T_i są geometrycznymi podobieństwami o skalach $k_i < 1$, to zbiór $\bigcup_{i=1}^{n} T_i(X)$ nazywamy *zbiorem samopodobnym* względem $T_1, \ldots, T_n$.

Uwaga 35
Przykładami zbiorów samopodobnych są:

- odcinek domknięty $[a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$,
- zbiór Cantora z geometrycznymi podobieństwami, $T_1(X) = \frac{1}{3}X$ i $T_2(X) = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$; w tym przypadku $\mathcal{F}(X) = \frac{1}{3}X \cup (\frac{1}{3}X + \frac{2}{3})$,
- trójkąt Sierpińskiego,
- zbiór Mandelbrota,
- krzywa von Kocha,
- „płonący statek”,
- paproć Bransley'a,
- zbiory Julii,
- inne fraktale.

Fraktale występują również w naturze (np. płatek śniegu, system naczyń krwionośnych, DNA, system rzeczny, błyskawica, ananas czy kwiat kalafiora). Ponadto znajdują przeróżne zastosowania praktyczne – np. w zagadnieniach kompresji danych, w grafice komputerowej, w technologii (np. antena fraktalna), w medycynie, w neurobiologii, w geologii, w geografii, w archeologii, w sejsmologii, w tworzeniu gier komputerowych i wielu innych dziedzinach wiedzy.

5.3. Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego

Definicja 36
Niech $f \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R})$. Wtedy *zagadnienie początkowe Cauchy'ego* polega na znalezieniu takiej funkcji x zmiennej t klasy $\mathcal{C}^1([0, T])$, że zachodzi:
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & t \in [0, T] \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

Klasyczny wynik mówi nam, że jeśli f spełnia warunek Lipschitza względem x, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia początkowego Cauchy'ego.

Rozważamy teraz przestrzeń funkcyjną $\mathcal{C}([0, T])$ z normą supremum i przeprowadzamy następujące obliczenia:

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

$$\int_0^t x'(s)ds = \int_0^t f(s, x(s))ds,$$

$$x(t) - \xi = \int_0^t f(s, x(s))ds,$$

$$x(t) = \xi + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Określamy:

$$(Fx)(t) = \xi + \int_0^t f(s, x(s))ds, \text{ gdzie } F\colon \mathcal{C}([0,T]) \to \mathcal{C}([0,T])$$

i wtedy rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego polega na znalezieniu punktu stałego odwzorowania F.

Przeprowadzamy oszacowanie dla każdego $x, y \in \mathcal{C}([0,T])$:

$$|(Fx)(t) - (Fy)(t)| = |\xi + \int_0^t f(s, x(s))ds - \xi - \int_0^t f(s, y(s))ds| \leq$$

$$\leq \int_0^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|ds \leq \int_0^t L|x(s) - y(s)|ds \leq Lt\|x - y\|,$$

a stąd po przejściu do supremum

$$\|Fx - Fy\| \leq LT\|x - y\|.$$

Rozważamy dwa przypadki:

1° $LT < 1$

Spełnione są wtedy wszystkie założenia twierdzenia Banacha, na mocy którego istnieje dokładnie jeden punkt stały odwzorowania F, który jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego.

2° $LT \geq 1$

Wtedy funkcja F nie jest kontrakcją, więc niestety nie możemy wprost skorzystać z twierdzenia Banacha. Jednakże możemy wykonać pewną modyfikację poprzedniego rozumowania, która pozwoli nam je zastosować. Otóż zacieśniamy przedział $[0, T]$, biorąc takie $h > 0$, że $Lh < 1$. Rozważamy wtedy przestrzeń funkcyjną $\mathcal{C}([0,h])$ i lokalne rozwiązanie x_0 zagadnienia Cauchy'ego w tejże przestrzeni, które istnieje na mocy twierdzenia Banacha o kontrakcji. Następnie rozważamy zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} x_1'(t) = f(t, x_1(t)) & t \in [h, 2h] \\ x_0(h) = x_1(h) \end{cases}.$$

Używając analogicznej techniki, mamy dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego. Skoro $x_1(h) = x_0(h)$, to z jednoznaczności rozwiązania x_1 jest ono jest przedłużeniem x_0 z $[0, h]$ na $[0, 2h]$ i po analogicznej skończonej liczbie kroków mamy zawsze rozwiązanie naszego zagadnienia na $[0, T]$.

5.4. Twierdzenie o funkcji uwikłanej

TWIERDZENIE 37 (O FUNKCJI UWIKŁANEJ)
Jeśli U jest obszarem w $\mathbb{R}^2$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$, $(a,b) \in U$, $f(a,b) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, to istnieje W – otoczenie punktu a, istnieje dokładnie jedna taka funkcja $g\colon W \to \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$, że $g(a) = b$ i $f(x, g(x)) = 0$ na W.

Dowód. Definiujemy funkcję

$$\Psi(x,y) = y - b - \frac{f(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}, \Psi \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}).$$

Z założeń $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, więc funkcja jest dobrze określona. Łatwo widać, że $\Psi(a,b) = 0$ oraz $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(a,b) = 0$. W związku z tym, że funkcja Ψ jest klasy $\mathcal{C}^1$, możemy zmniejszyć rozważany obszar U do K tak, żeby dla każdego $(x,y) \in K$ zachodziło $|\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y)| < \frac{1}{2}$.

Możemy przyjąć, bez straty ogólności $K = A \times B$, gdzie $A = [a-c, a+c]$, $B = [b-c, b+c]$, a $c > 0$. Definiujemy zbiór $V = \{x \in A\colon \Psi(x,b) < \frac{1}{2}c\}$ będący otoczeniem a.

Dla $x \in A$, $y_1, y_2 \in B$ z twierdzenia Lagrange'a zachodzi

$$|\Psi(x,y_1) - \Psi(x,y_2)| = |\tfrac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y)||y_1 - y_2| < \tfrac{1}{2}|y_1 - y_2|, \text{ gdzie } y \in (y_1, y_2).$$

Rozważamy teraz przestrzeń funkcyjną $\mathcal{C}(V,B)$ z metryką supremum σ określoną w ten sposób, że:

$$\sigma(f,g) = \sup\{f(r) - g(r), r \in V\}$$

oraz podprzestrzeń domkniętą

$$X = \{f \in \mathcal{C}(V,B)\colon f(a) = b\}.$$

Punktowi $g \in X$ przyporządkujemy funkcję $F[g]$ w następujący sposób:

$$[F(g)] = b + \Psi(x, g(x)), \text{ gdzie } x \in V.$$

Sprawdzamy założenia twierdzenia Banacha o punkcie stałym:

- X jest zupełna jako podprzestrzeń domknięta przestrzeni zupełnej,
- $F\colon X \to X$, ponieważ $F(g) \in X$, bo
  $[F(g)] = b$ oraz $|[F(g)](x) - b| = |b + \Psi(x,g(x)) - b| = |\Psi(x,g(x))| = |\Psi(x,g(x)) - \Psi(x,b) + \Psi(x,b)| \leq |\Psi(x,g(x)) - \Psi(x,b)| + |\Psi(x,b)| < \frac{1}{2}|g(x) - b| + \frac{1}{2}c \leq \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = c$,
- F jest kontrakcją ze stałą $k = \frac{1}{2}$, ponieważ dla dowolnych
  $h, g \in X$ i $x \in U$ przeprowadzimy następujące oszacowanie:
  $|[F(h)](x) - [F(g)](x)| = |\Psi(x,h(x)) - b - \Psi(x,g(x)) + b| = |\Psi(x,h(x)) - \Psi(x,g(x))| \leq \frac{1}{2}|h(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2}\sigma(h,g)$.
  To z kolei implikuje, że $\sigma([F(h)],[F(g)]) \leq \frac{1}{2}\sigma(h,g)$,

czyli z twierdzenia Banacha o punkcie stałym istnieje dokładnie jedna taka funkcja ciągła φ, że

$$[F(\varphi)](x) = \varphi(x).$$

Z określenia funkcji F można łatwo dojść do tezy, bo następujące równości są równoważne:

$$\varphi(x) = b + \Phi(x, \varphi(x)),$$

$$\varphi(x) = b + \varphi(x) - b - \frac{f(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))},$$

$$0 = f(x,y).$$

5.5. Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym

Twierdzenie 38 (o odwzorowaniu otwartym)
Jeśli U jest otwartym podzbiorem przestrzeni Banacha X, a $F\colon U \to X$ – kontrakcja ze stałą k, $F = I - T$, to $F(U)$ jest otwarty.

Dowód. Zachodzi inkluzja $B(F(z), (1-k)r) \subset F(B(z,r)) \subset F(U)$.
Wystarczy zatem pokazać, że

$$\|F(z) - y\| < (1-k)r.$$

W tym celu definiujemy funkcję

$$f(x) = x - F(x) + y, \text{ gdzie } x \in B(z,r).$$

Owa funkcja spełnia założenia twierdzenia Banacha o punkcie stałym:

- $B(z,r)$ jest przestrzenią zupełną,
- $f\colon B(z,r) \to B(z,r)$, ponieważ:
$\|f(x)-z\| = \|x-F(x)+y-z\| = \|T(x)-y+z\| = \|T(x)-y+T(z)-T(z)+z\| \le \|T(x)-T(z)\|+\|T(z)-y+z\| \le k\|x-z\|+\|F(z)-y\| \le kr+(1-k)r = r$,
- czyli f jest kontrakcją ze stałą k, gdyż

$$\|f(x) - f(z)\| = \|x - F(x) + y - z + F(z) - y\| = \|x - F(x) + y - F(y)\| = \|T(x) - T(y)\| \le k\|x - y\|.$$

Z twierdzenia Banacha funkcja f ma dokładnie jeden punkt stały $w \in B(z,r)$, zatem:

$$f(w) = w,$$

$$w - F(w) + y = w,$$

$$y = F(w),$$

więc y leży w obrazie kuli $B(z,r)$ przez F.

Literatura

[1] K. Goebel, W. A. Kirk, *Zagadnienia metrycznej teorii punktów stałych*, UMCS, Lublin, 2010.

[2] R. Engelking, K. Sieklucki, *Geometria i topologia. Część II: Topologia*, PWN, Warszawa, 1980.

[1] *Instytut Matematyki*
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
ul. Gołębia 24
31-007 Kraków
E-mail: barbara.ciesielska@uj.edu.pl

[2] *Instytut Matematyki*
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
ul. Gołębia 24
31-007 Kraków
E-mail: agnes.kowalczyk@uj.edu.pl

Przysłano: 11.06.2014; publikacja on-line: 29.09.2014.