Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 1 (2014), 59-68

Prace Koła Matematyków Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2014)

Joanna Sęk

O pewnej geometrii skończonej

Streszczenie. W niniejszym artykule przedstawiony jest model pewnej geometrii skończonej, nazwanej geometrią dziewięciu punktów. W części pierwszej podana zostanie konstrukcja pewnego zbioru, stanowiącego punkt wyjścia do prowadzonych rozważań. W kolejnych częściach zostaną zaprezentowane definicje podstawowych pojęć z zakresu geometrii dziewięciu punktów, ich własności oraz wiążące się z nimi twierdzenia poparte dowodami. Definicje oraz twierdzenia zostały zaczerpnięte z pracy magisterskiej p. A. Puczki i odpowiednio zmodyfikowane. Artykuł ten może stać się źródłem do prowadzenia dalszych rozważań związanych z zaprezentowanym tutaj modelem geometrii skończonej.

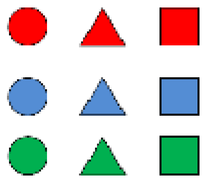
Abstract. In my article I present a model of discrete geometry, which is called the nine–points geometry. In the first part I give a construction of a certain set, which is a starting point to conducted research. In the next parts I present definitions of basic concepts in the field of nine–points geometry, their properties and theorems with proofs. The definitions and the theorems were gathered from A. Puczka's master thesis and they were modified adequately. This article might be an inspiration for further deliberations, which are connected with the model of discrete geometry presented here.

1. Wstęp

Podamy konstrukcję pewnego zbioru, który będzie podstawą do rozważań o geometrii dziewięciu punktów.

Rozważmy trzy koła, trzy trójkąty i trzy kwadraty. Jeden element z każdego rodzaju figur został pokolorowany odpowiednio na czerwono, niebiesko oraz na zielono. Każda figura ma więc dwie cechy: kształt i kolor (patrz rys. 1).

AMS (2010) Subject Classification: 52C35, 97D80.
Słowa kluczowe: geometria skończona, geometria dziewięciu punktów
Key-words: discrete geometry, nine–points geometry.



Rys. 1.

Dużymi literami oznaczmy kształty, odpowiednio: K — koło, T — trójkąt i Q — kwadrat. Małymi literami oznaczmy odpowiednio kolory: c — czerwony, n — niebieski i z — zielony. W ten sposób każda figura może być zakodowana w sposób jednoznaczny przez podanie kształtu i koloru (patrz tabela 1).

	koło	trójkąt	kwadrat
czerwony	Kc	Tc	Qc
niebieski	Kn	Tn	Qn
zielony	Kz	Tz	Qz

Tabela 1.

Przyjmujemy następujące określenie:

Definicja 1
Zbiór $\{Kc, Kn, Kz, Tc, Tn, Tz, Qc, Qn, Qz\}$ nazywamy *γ-płaszczyzną*. Elementy należące do γ-płaszczyzny nazywamy *γ-punktami*.

Jak już zauważyliśmy wcześniej, każdy γ-punkt jest wyznaczony jednoznacznie przez podanie kształtu i koloru.

W naszych poglądowych ilustracjach γ-płaszczyzna ma zawsze jednakowe rozmieszczenie γ-punktów (patrz rysunek 1).

Przyjmijmy następującą definicję:

Definicja 2
Dowolny podzbiór γ-płaszczyzny nazywamy *γ-figurą*.

Przykład 3
Podane zbiory są przykładami γ-figur.

$A = \{Kc, Tc, Qn, Qz, Tz, Kn\}$

$B = \{Tc, Qc, Tn, Qz\}$

2. Kolekcje I i II rodzaju

Zdefiniujmy kolekcję I rodzaju:

Definicja 4
Kolekcją I rodzaju nazywamy zbiór wszystkich γ-punktów, mających dokładnie jedną wspólną cechę: kształt albo kolor.

Przykład 5
Podane zbiory A i B są przykładami kolekcji I rodzaju:
$A = \{Qn, Qz, Qc\}$
$B = \{Tz, Qz, Kz\}$

Z definicji γ-płaszczyzny i kolekcji I rodzaju wynika poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 6
Kolekcja I rodzaju jest zbiorem trójelementowym.

Dowód. Zauważmy, że w γ- płaszczyźnie są dokładnie trzy γ-punkty, mające ten sam kolor oraz dokładnie trzy γ-punkty, mające ten sam kształt. Ustalmy dowolny γ-punkt. Niech będzie on „pierwszym" elementem kolekcji I rodzaju. Do ustalonego γ-punktu możemy „dobrać" dokładnie dwa γ-punkty, mające ten sam kolor lub mające ten sam kształt. Zatem kolekcja I rodzaju jest zbiorem trzech γ-punktów.

Z powyższego rozumowania wynika następujący wniosek:

Wniosek 7
Każdy γ-punkt należy do dwóch kolekcji I rodzaju.

Przyjmijmy następującą definicję:

Definicja 8
Kolekcją II rodzaju nazywamy zbiór wszystkich takich γ-punktów, że każde dwa spośród nich różnią się dokładnie dwiema cechami - kształtem i kolorem.

Przykład 9
Podane zbiory A i B są przykładami kolekcji II rodzaju:
$A = \{Kz, Qc, Tn\}$
$B = \{Tc, Kn, Qz\}$

Z definicji γ-płaszczyzny oraz definicji kolekcji II rodzaju wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10
Kolekcja II rodzaju jest zbiorem trójelementowym.

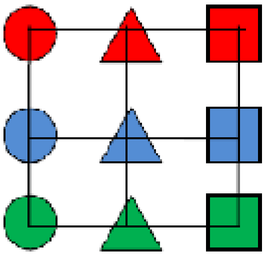
Dowód. Zauważmy, że, wybierając dowolny γ-punkt, ustalamy jego kształt spośród trzech możliwych i jego kolor spośród trzech możliwych. Ustalmy dowolne dwa γ-punkty różniące się między sobą kształtem i kolorem. Wybierając w ten sposób dwa γ-punkty, wybraliśmy dwa różne kolory i dwa różne kształty. Został nam więc do dyspozycji jeden niewykorzystany dotąd kolor i jeden kształt, które wyznaczają dokładnie jeden γ-punkt, zatem kolekcja II rodzaju jest zbiorem trzyelementowym.

Z powyższego rozumowania wynika poniższy wniosek:

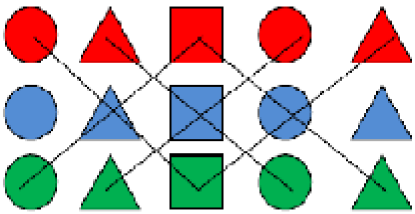
Wniosek 11
Każdy γ-punkt należy dokładnie do dwóch kolekcji II rodzaju.

Z definicji kolekcji I i II rodzaju wynika, że nie istnieje γ-figura będąca jednocześnie kolekcją I i II rodzaju. Zauważmy także, że istnieje sześć kolekcji I rodzaju oraz sześć kolekcji II rodzaju.

Na rys. 2 zostały przedstawione wszystkie kolekcje I rodzaju, na rys. 3 zaś wszystkie kolekcje II rodzaju.



Rys. 2.



Rys. 3.

Zauważmy, że kolekcje I rodzaju można utożsamić z wierszami i kolumnami w standardowym rozmieszczeniu γ-punktów γ-płaszczyzny, a kolekcje II rodzaju można utożsamić z „przekątnymi” w rozbudowanym standardowym rozmieszczeniu γ-punktów γ-płaszczyzny. [1]

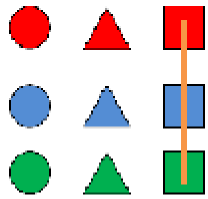
[1]Rozbudowane standardowe rozmieszczenie γ-punktów γ-płaszczyzny ilustruje rysunek 3.

3. O γ-prostych

Zdefiniujmy γ-prostą:

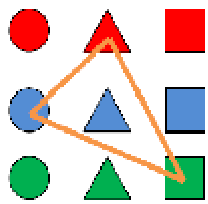
DEFINICJA 12
Kolekcję I lub II rodzaju nazywamy *γ-prostą*. Kolekcję I rodzaju nazywamy *prostą I rodzaju*. Analogicznie kolekcję II rodzaju nazywamy *prostą II rodzaju*.

PRZYKŁAD 13
Zbiór A jest przykładem prostej I rodzaju, zbiór B — przykładem prostej II rodzaju. $A = \{Kc, Kn, Kz\}$ (ilustracja: rys. 4.)



Rys. 4.

$B = \{Kn, Tc, Qz\}$ (ilustracja: rys. 5.)



Rys. 5.

Z twierdzeń 6 i 10 wynika następujący wniosek:

WNIOSEK 14
Każda γ-prosta jest zbiorem trójelementowym.

Zauważmy, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

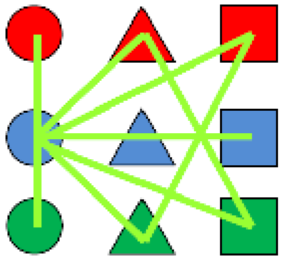
TWIERDZENIE 15
Każdy γ-punkt należy dokładnie do czterech różnych γ-prostych.

Dowód. Ustalmy dowolny γ-punkt. Z wniosku 1 wynika, że należy on do dwóch kolekcji I rodzaju, a więc, zgodnie z definicją γ-prostej, do dwóch prostych I rodzaju. Analogicznie z wniosku 2 wynika, że ustalony γ-punkt należy także do dwóch prostych II rodzaju. Skoro żadne z prostych I i II rodzaju się nie pokrywają, zatem dowolny γ-punkt należy do czterech różnych prostych.

Przyjmijmy następującą definicję:

Definicja 16
Pękiem γ-prostych o wierzchołku w γ-punkcie P nazywamy rodzinę wszystkich γ-prostych, do których należy ten γ-punkt. Pęk γ-prostych o wierzchołku w punkcie P oznaczamy symbolem (P).

Przykład 17
Podany zbiór jest pękiem γ-prostych o wierzchołku w punkcie Kn.
(Kn)=$\{\{Kn,\ Kz,\ Kc\},\ \{Kn,\ Tn,\ Qn\},\ \{Kn,\ Qz,\ Tc\},\ \{Kn,\ Qc,\ Tz\}\}$ (ilustracja: rys. 6)



Rys. 6.

Z twierdzenia 15 wynika poniższy wniosek:

Wniosek 18
Pęk prostych o wierzchołku w dowolnym γ-punkcie jest zbiorem czterolementowym.

4. O γ-odległości

Pokażemy, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 19
*Funkcja $d : \gamma \times \gamma \to \mathbb{R}$ określona dla dowolnych γ- punktów $P, Q \in \gamma$ w następujący sposób $d(P, Q)$ = **liczba cech, którymi** P **różni się od** Q, jest metryką na γ-płaszczyźnie. Funkcję tę nazywamy γ-odległością.*

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnych γ-punktów P i Q odległość $d(P, Q) \in \{0, 1, 2\}$.

Ustalmy dwa dowolne γ-punkty P i Q. Oczywistym jest, że jeżeli $P = Q$, to liczba różniących je cech wynosi zero i taką samą wartość ma wtedy $d(P, Q)$. Załóżmy, że $d(P, Q) = 0$. Zgodnie z definicją γ-odległości, punkty P i Q nie różnią się żadną cechą, a więc $P = Q$.

Zgodnie z definicją, odległość $d(P, Q)$ jest równa liczbie cech, którymi punkt P różni się od punktu Q. Punkt Q różni się od punktu P taką samą liczbą cech. Mamy więc $d(P, Q) = d(Q, P)$.

Ustalmy dowolne γ- punkty P, Q, R. Zauważmy, że jeśli $d(P, Q) = 0$, nierówność trójkąta jest prawdziwa.

Podobnie, jeżeli $d(P, Q) = 1$, nierówność trójkąta jest również spełniona. Istotnie, z definicji odległości γ- punktów wynika, że skoro $d(P, Q) = 1$, punkty P i Q różnią się dokładnie jedną cechą. Jeżeli $P \neq R$ i $Q \neq R$, wówczas punkty P i R oraz Q i R różnią się co najmniej jedną cechą, a więc $d(P, R) \geq 1$ oraz $d(Q, R) \geq 1$, więc nierówność trójkąta jest spełniona.

Jeśli $d(P, Q) = 2$, to punkty P i Q różnią się dokładnie dwiema cechami. Jeżeli $P \neq R$ i $Q \neq R$, wówczas punkty P i R oraz Q i R różnią się co najmniej jedną cechą, a więc $d(P, R) \geq 1$ oraz $d(Q, R) \geq 1$ i nierówność trójkąta jest spełniona.

Udowodniliśmy, że zdefiniowana powyżej funkcja d jest metryką w zbiorze wszystkich γ-punktów.

Definicja 20
Funkcję d określoną w twierdzeniu 19 będziemy nazywać γ- *odległością*.

Przykład 21
Odległość podanych γ-punktów jest odpowiednio równa:

$d(Tc, Qz) = 2$

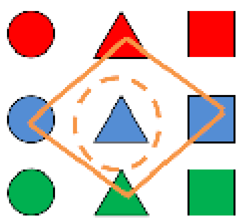
$d(Qn, Kn) = 1$

5. Okręgi na γ- płaszczyźnie

Definicja 22
Okręgiem o środku w punkcie O i promieniu $r \geq 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów γ-płaszczyzny, których odległość od punktu P jest równa r. Oznaczamy go symbolem: $o(P, r)$.

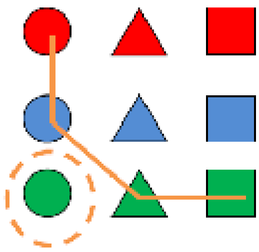
Poniżej przedstawiono przykłady 3 okręgów. Linią przerywaną zaznaczono środek okręgu, a linią ciągłą połączono punkty należące do okręgu:

Przykład 23
a) $o(Tn, 1)$ (ilustracja: rys. 7.)



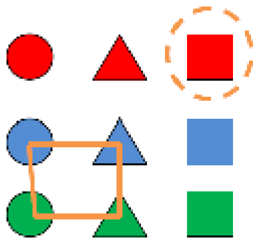
Rys. 7.

b) $o(Kz, 1)$ (ilustracja: rys. 8.)



Rys. 8.

c) $o(Qc, 2)$ (ilustracja: rys. 9.)



Rys. 9.

Jak nietrudno zauważyć, prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 24
Okręgi o wspólnym środku w dowolnym γ- punkcie i promieniach równych 0, 1 i 2 generują całą γ- płaszczyznę.

6. Przecinające się i równoległe γ-proste.

Zdefiniujmy teraz γ-proste przecinające się:

Definicja 25
Mówimy, że *γ-proste a i b przecinają się w danym γ-punkcie*, jeżeli ten γ-punkt jest jedynym γ-punktem wspólnym tych prostych. Nazywamy go punktem przecięcia prostych a oraz b.

Poniżej przedstawiono przykłady prostych przecinających się:

Przykład 26
Proste $\{Kc, Tc, Qc\}$ i $\{Tc, Tn, Tz\}$ przecinają się w punkcie Tc.
Proste $\{Tc, Qn, Kz\}$ i $\{Kc, Qn, Tz\}$ przecinają się w punkcie Qn.

Z definicji prostej I rodzaju, prostej II rodzaju oraz prostych przecinających się wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 27
Każda prosta I rodzaju przecina każdą prostą II rodzaju.

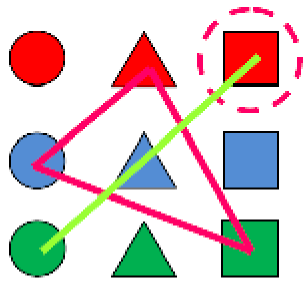
Dowód. Ustalmy dowolną prostą a. Niech będzie ona prostą I rodzaju. Z definicji γ-prostej wynika, że jest ona zbiorem trzyelementowym. Każdy z γ-punktów należących do ustalonej γ-prostej a należy do dwóch kolekcji II rodzaju. Zatem każda prosta I rodzaju przecina każdą z 6 prostych II rodzaju.

Zdefiniujmy γ-proste równoległe:

Definicja 28
Mówimy, że *γ-proste a i b są równoległe*, jeżeli są rozłączne.

Poniżej przedstawiono ilustrację dwóch prostych równoległych. Liniami ciągłymi połączono punkty należące do wskazanych prostych.

Przykład 29
Prostą równoległą do prostej $\{Tc, Qz, Kn\}$ i przechodzącą przez punkt Kc jest prosta $\{Kc, Tn, Qz\}$. (ilustracja: rys. 12.)



Rys. 12.

Z definicji γ-prostych oraz prostych równoległych wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 30
Dla dowolnej γ-prostej a i dowolnego γ-punktu P nie należącego do prostej a, istnieje dokładnie jedna γ-prosta b równoległa do danej prostej a i przechodząca przez punkt P.

Dowód. Zauważmy, że proste równoległe są zawsze prostymi tego samego rodzaju. Dowodząc twierdzenie 4, odwołamy się do graficznego przedstawienia γ-płaszczyzny (patrz rys. 2 i rys. 3). Rozważmy dwa przypadki.

1. Niech a będzie prostą I rodzaju, a punkt P punktem nie należącym do prostej a. Skoro prosta a jest kolekcją I rodzaju, to możemy utożsamić ją z pewnym wierszem lub pewną kolumną w standardowym rozmieszczeniu γ-punktów γ-płaszczyzny (patrz rys. 2). Skoro punkt P nie należy do prostej a, to możemy wskazać dokładnie jeden wiersz, w którym znajduje się punkt P, a który

nie ma punktów wspólnych ze wskazanym wcześniej wierszem (utożsamionym z prostą a). Wskazaliśmy zatem dokładnie jedną prostą równoległą do prostej a, do której należy punkt P. Analogicznie rozumujemy w przypadku, gdy prostą I rodzaju możemy utożsamić z pewną kolumną w standardowym rozmieszczeniu γ- punktów γ-płaszczyzny.

2. Niech a będzie γ-prostą II rodzaju, a punkt P niech będzie punktem nie należącym do prostej a. Skoro prosta a jest kolekcją II rodzaju, to możemy ją utożsamić z pewną „przekątną" w rozbudowanym rozmieszczeniu γ-płaszczyzny (patrz rysunek 3). Punkt P nie należy do tej prostej, a więc możemy wskazać dokładnie jedną „przekątną", do której należy punkt P, a która nie ma punktów wspólnych ze wskazaną wcześniej przekątną (utożsamioną z prostą a). Wskazaliśmy zatem dokładnie jedną prostą II rodzaju równoległą do danej, do której należy punkt P.

7. Podsumowanie

W artykule zostały przywołane podstawowe własności pojęć z zakresu geometrii dziewięciu punktów. Nie zostały tu uwzględnione nietypowe przypadki. Geometria dziewięciu punktów jest bogatym źródłem zagadnień, których rozważanie może przyczynić się do samodzielnego definiowania nowych obiektów i badania ich własności.

Literatura

[1] A. Puczka, *O pewnej skończonej geometrii euklidesowej (Materiały do pracy w szkolnym kole matematycznym)*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Kraków, 1996.

[2] J. Sęk, *Geometria dziewięciu punktów narzędziem do diagnozowania i rozwijania umiejętności matematycznych uczniów*, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, Kraków, 2013.

[1] *Instytut Matematyki*
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie
ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków
E-mail: joanna.sek.pl@gmail.com

Przysłano: 12.06.2014; publikacja on-line: 30.09.2014.