Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 1 (2014), 69-83

Prace Koła Matematyków
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2014)

Joanna Powązka[1]

Przykład zastosowania kalkulatora TI-*n*spire CX do rozwiązania zadania problemowego

Streszczenie. Artykuł opisuje propozycję dydaktyczną wykorzystania kalkulatora graficznego TI-*n*spire CX firmy Texas Instrument do rozwiązania zadania problemowego. Narzędzie to umożliwia uczniowi eksperymentowanie prowadzące do znalezienia rozwiązania. Daje ono również nauczycielowi możliwość zdalnego kierowania pracą ucznia.

Abstract. This article describes a didactic suggestion on as how to use a graphic calculator TI-*n*spire CX of Texas Instruments in order to solve an open end task. The usage of the device allows for experiments leading to the solution of the posed problem. It gives also the teacher the opportunity to direct student research remotely.

1. Zadania i problemy w nauczaniu matematyki

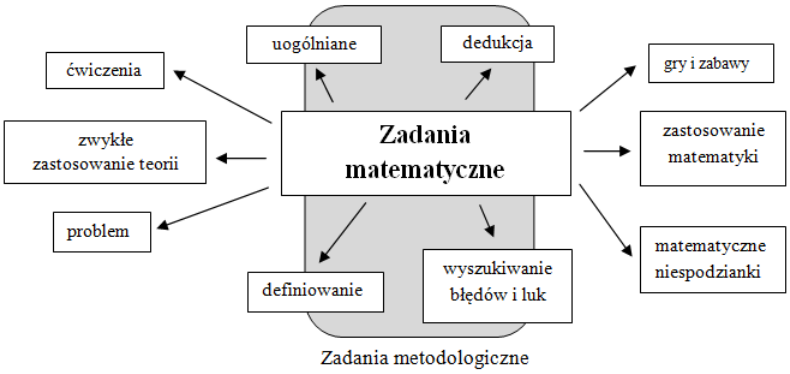
Według *Słownika języka polskiego*, zadanie jest *tym, co należy wykonać* lub *zagadnieniem danym do opracowania* [9, t. 4, s. 766]. W nauczaniu matematyki odgrywa ono istotną rolę. Zdaniem Z. Krygowskiej od rodzajów rozwiązywanych przez uczącego się zadań zależy wizja matematyki, jaka powstaje w jego umyśle [2, s. 3]. Dlatego tak ważne jest, aby w procesie nauczania matematyki nauczyciele stosowali różne rodzaje zadań. W trakcie ich rozwiązywania uczeń może sprawdzać i utrwalać zdobytą wiedzę. Za pomocą stosownie dobranych zadań nauczyciel może także odkrywać z uczniami definicje opracowywanych pojęć matematycznych oraz uczyć dowodzenia twierdzeń i logicznego myślenia. Natomiast poprzez zadania z kontekstem realistycznym ukazuje się uczniom różne zastosowania matematyki w życiu codziennym.

Dydaktycy matematyki podejmowali wiele prób pogrupowania w jakieś sposób zadań matematycznych. Z. Krygowska, omawiając różne typologie zadań, stwierdziła, że *tradycyjny podział - to wyróżnienie według działów matematyki szkolnej* (*zadania arytmetyczne, algebraiczne, geometryczne, trygonometryczne*) [2, s. 15].

AMS (2010) Subject Classification: 97D20, 97D50, 97G70, 97M50, 97U70.
Słowa kluczowe: kalkulator graficzny, zadanie problemowe, suma wektorów, twierdzenie sinusów, przedłużanie zadania.

W 1975r. G. Polya [6, s. 146-150] podał podział na zadania typu *znaleźć* oraz zadania typu *udowodnić*. S. Turnau [8, 38-47] wskazał inną typologię. Zwrócił on uwagę na to, jakie cele edukacyjne realizują zadania. Jako dwa główne przyjął: *radzić sobie w codziennych sytuacjach* oraz *umieć matematykę*.

Na szczególną uwagę zasługuje typologia zaproponowana przez Z. Krygowską [2, s. 14-78]. Autorka w wyniku analizy procesu rozwiązania zadania wyodrębnia z niego wiele cech, następnie wybiera jedną z nich i ustala ją jako główną cechę tego rozwiązania. Wybór cechy może zależeć od tego, na jakim etapie nauczania wystąpiło dane rozwiązanie. Podział ten ilustruje Rys. 1.



Rys. 1

Centralną część tego rysunku zajmują zadania metodologiczne (zadania na definiowanie, uogólnianie, dowodzenie i odkrywanie błędów), które ukazują istotę metody matematycznej. Ćwiczenia i zwykłe zastosowania teorii (znajdujące się w lewej części Rys. 1.) powinny pojawiać się w szkole przy opracowaniu każdego zagadnienia.

Ważną rolę w procesie kształtowania matematycznego myślenia odgrywają zadania-problemy (lewa strona Rys. 1.). Trudno podać jedną definicję problemu. J. Kozielecki proponuje następującą: *Problem jest rodzajem zadania* (*sytuacji*), *którego podmiot nie może rozwiązać za pomocą posiadanego zasobu wiedzy. Rozwiązanie jego jest możliwe dzięki czynności myślenia produkcyjnego, która prowadzi do wzbogacenia wiedzy podmiotu* [1, s. 16]. Dla Z. Krygowskiej zadania-problemy to zadania, przy rozwiązaniu których nie można stosować znanych algorytmów postępowania [2, s. 20- 38]. Sytuacje tego typu zmuszają do poszukiwań oraz rozpoczęcia aktywności badawczej, a także prowadzą do konstruowania nowej wiedzy. Mimo iż są to zadania niestandardowe, to nie oznacza, że powinny być stawiane tylko przed uczniami uzdolnionymi matematycznie. Każdy mógłby spróbować zmierzenia się z tego typu zadaniem, bo problem nie musi opierać się na trudności zadania, ale na innowacyjności np. w jego sformułowaniu. Ich rozwiązywanie staje się okazją do wykorzystywania różnych środków dydaktycznych, a w szczególności technologii informacyjnej. Zadania z prawej strony rysunku (gry, matematyczne niespodzianki, zastosowania matematyki) mają na celu wzbogacanie procesu dydaktycznego. Warto wykorzystać je na lekcjach dodatkowych lub zajęciach pozalekcyjnych. Właśnie rozwiązaniami tego typu zadań zajmiemy się w tym artykule.

2. Teksańskie narzędzie do rozwiązywania problemów

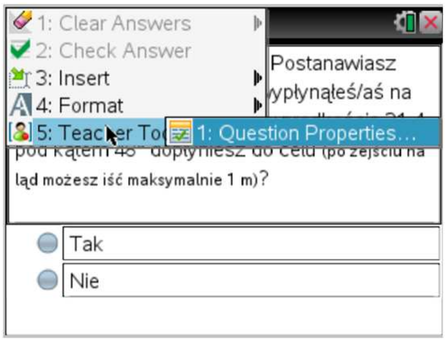
W tej części pracy podamy krótki opis kalkulatora TI-$n$spire CX (Rys. 2). Umożliwia on wykonywanie bardzo złożonych operacji.

Rys. 2

Można wykorzystywać go do pracy ze specjalnie przygotowanymi dokumentami lub do tworzenia własnych dokumentów. Potrzebne pliki przygotowywane są za pomocą kalkulatora bądź przy użyciu jego symulatora na komputerze. Do kalkulatora dołączane jest oprogramowanie dla uczniów i nauczycieli, które pozwala na symulację tego narzędzia na komputerze.

Kalkulator, oprócz prostych operacji arytmetycznych, posiada możliwość dokonywania wielu obliczeń z zakresu analizy matematycznej (pochodne, całki, granice ciągów) i algebry (macierze). Dodatkowo jest wyposażony w szereg funkcji związanych ze statystyką, rachunkiem prawdopodobieństwa czy finansami. Jego zaletą jest możliwość definiowania własnych funkcji i programów, które możemy następnie używać podczas dalszej pracy. Za pomocą tego kalkulatora można badać przebieg zmienności funkcji, a także prezentować wykresy funkcji w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Można także narysować figury geometryczne oraz mierzyć długości odcinków, pól figur i rozwartości kątów. Oprogramowanie posiada aplikacje zawierające przekształcenia geometryczne (np. symetrię osiową) oraz konstrukcje (np. prostej prostopadłej do danej). Inne opcje kalkulatora to arkusze kalkulacyjne, notatki oraz analiza danych.

Interesująca dla nauczyciela może być aplikacja służąca do układania testów (Rys. 3).



Rys. 3

Umożliwia ona zdefiniowanie zarówno pytań otwartych, jak i zamkniętych. Przykładem tych pierwszych są takie, których rozwiązanie polega na zaznaczeniu punktów na wykresie, wykonaniu obliczeń lub napisaniu notatki. Zadania zamknięte mogą przybrać kształt testu jednokrotnego lub wielokrotnego wyboru, lecz także pytań, na które odpowiadamy, łącząc ze sobą różne elementy. Narzędzie to jest bardzo użyteczne, ponieważ umożliwia w prosty i szybki sposób stworzenie sprawdzianu złożonego z pytań zamkniętych, którego poprawność możemy sprawdzić w sposób automatyczny. Aplikacja ta jest dostępna tylko w wersji nauczycielskiej omawianego oprogramowania.

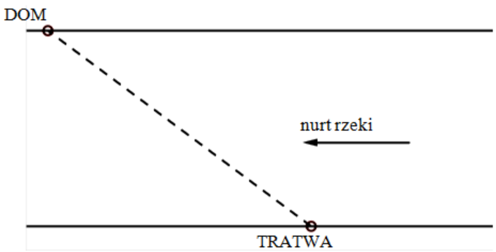
Opisany powyżej kalkulator TI-*n*spireCX wydaje się być bardzo dobrym narzędziem, które można wykorzystać w nauczaniu matematyki. Praca z nim w klasie wymaga połączenia urządzeń, na których pracują uczniowie, z urządzeniem nauczyciela (za pomocą kabla lub bezprzewodowo). Dzięki tak małym wymaganiom technicznym kalkulator ten umożliwia prowadzenie zajęć z wykorzystaniem nowoczesnych technologii nie tylko w pracowni informatycznej, ale praktycznie w dowolnym miejscu. Działalność nauczyciela w takim modelu pracy sprowadzać się może do przesyłania uczniom plików z zadaniami i odbieraniem od nich gotowych rozwiązań, pozostawiając im swobodę co do metody postępowania. Nauczyciel zyskuje także możliwość sprawdzania aktywności uczniów, bowiem w dowolnej chwili może wyświetlić na ekranie swojego komputera zawartość ekranu kalkulatora dowolnego ucznia. Zmniejsza to prawdopodobieństwo, że uczniowie będą kierować swoją aktywność na czynności niezwiązane z rozwiązywaniem zadań. Poniżej zostanie ukazane przykładowe zastosowanie opisanego kalkulatora.

3. Zadania o „rwącej rzece"

Rozważania tej części zostały zainspirowane pracą [7], w której omówiono propozycję dydaktyczną symulacji przeprawy przez rzekę za pomocą komputera ZX Spectrum. Była ona przeznaczona dla uczniów klasy 8 ówczesnej szkoły podstawowej. Zaprezentowane przeze mnie ujęcie nadaje się obecnie do wykorzystania na kółkach matematycznych w szkołach ponadgimnazjalnych lub dla studentów studiów matematycznych albo technicznych. Rozważmy następujące zadanie:

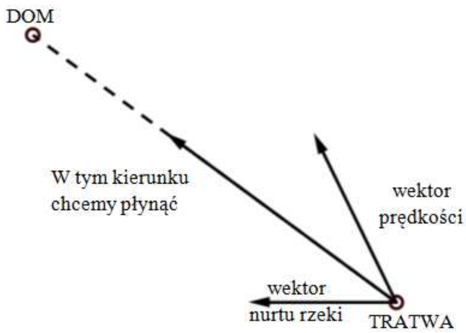
Zadanie 1
Wyobraź sobie, że stoisz nad rzeką. Twój dom znajduje się na drugim brzegu. Chcesz dotrzeć do niego, używając swobodnie pływającej tratwy. Jak dobrać kąt, pod którym musisz wypłynąć, aby dopłynąć do celu (zakładasz, że twoja prędkość, nurt rzeki oraz kąt, pod którym wypływasz, nie zmieniają się w czasie podróży)?

Przystępując do rozwiązania tego zadania, przedstawiamy opisaną sytuację na Rys. 4.



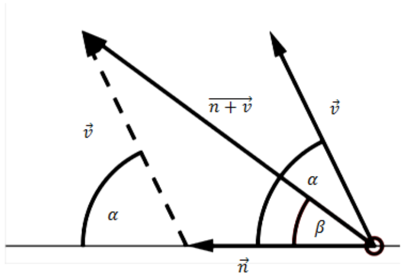
Rys. 4

Z praw fizyki wynika, że kierunek, w którym będziemy się poruszać, jest wyznaczony przez wektor będący sumą wektora nurtu rzeki i wektora prędkości (Rys. 5).



Rys. 5

Niech $\vec{v}$ będzie wektorem prędkości, a $\vec{n}$ wektorem nurtu rzeki. Przyjmijmy $v := |\vec{v}|$ i $n := |\vec{n}|$, gdzie v oznacza długość wektora $\vec{v}$ oraz n długość wektora $\vec{n}$. Przez α oznaczmy miarę kąta między $\vec{v}$, a $\vec{n}$ oraz przez β miarę kąta między wektorem wyznaczonym przez kierunek $TRATWA - DOM$, a $\vec{n}$. Wobec założenia $\vec{v}$, $\vec{n}$ i są ustalone, i nie zmieniają się podczas rozwiązania. Naszym zadaniem jest dobranie kierunku i zwrotu wektora $\vec{v}$ tak, aby wektor $\overrightarrow{n+v}$ wyznaczał kierunek $TRATWA - DOM$. Zatem model matematyczny opisanej sytuacji przedstawia Rys. 6.



Rys. 6

Zastosujmy twierdzenie sinusów dla trójkąta wyznaczonego przez wektory $\vec{n}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{n+v}$:

$$\frac{v}{\sin\beta} = \frac{|\overrightarrow{n+v}|}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{n}{\sin(\pi-(\beta+\pi-\alpha))}.$$

Stąd otrzymujemy równość: $\sin(\alpha-\beta) = \frac{n\cdot\sin\beta}{v}$. Stosując do obu stron równości funkcję arcsinus, otrzymujemy:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{n\cdot\sin\beta}{v}\right) + \beta.$$

Zauważmy, że z twierdzenia sinusów wynika, że

$$-1 \leq \frac{n\cdot\sin\beta}{v} \leq 1,$$

zatem złożenie z funkcją arcsinus jest możliwe, gdyż taka jest dziedzina tej funkcji.

Analizując otrzymane rozwiązanie, warto postawić jeszcze następujące pytania:

- *Czy dla dowolnych wartości prędkości i nurtu rzeki można dostać się do celu po rozważanej drodze?*

  Z warunków zadania wynika, że β jest liczbą z przedziału $(0,\pi)$, więc $\sin\beta > 0$ (zob. Rys. 6). Zatem, odwołując się do otrzymanego wcześniej rozwiązania, a dokładnie do założeń, które wprowadziliśmy, otrzymujemy, że dopłynięcie do celu możliwe jest tylko dla n i v spełniających następujący warunek:

  $$-v \leq n\sin\beta \leq v.$$

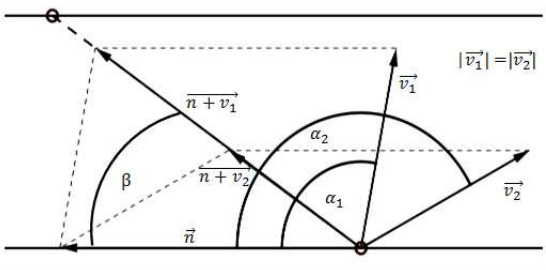
  Odnotujmy w tym miejscu, że jeżeli liczby n i v będą tak dobrane, że iloraz $\frac{n\cdot\sin\beta}{v}$ nie jest dla żadnej wartości $\beta \in (0,\pi)$ z przedziału $[0,1]$, to przeprawa nie jest możliwa (np. $n > 2v$). Wynika stąd, że rzeka jest na tyle rwąca, że nie potrafimy ją pokonać siłą naszych mięśni. Wtedy tratwę trzeba wyposażyć w silnik.

- *Czy może zdarzyć się tak, że mamy więcej niż jedno rozwiązanie tego zadania?*

W tej sytuacji należy przypomnieć sobie własności funkcji sinus. Jedną z nich jest $\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha)$. Zatem w rozwiązaniu, po zastosowaniu twierdzenia sinusów, otrzymujemy: $\sin(\alpha-\beta) = \frac{n\cdot\sin\beta}{v}$, ale także $\sin(\pi-\alpha+\beta) = \frac{n\cdot\sin\beta}{v}$. Rozwiązując te dwa równania, otrzymujemy:

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{n\cdot\sin\beta}{v}\right) + \beta \text{ lub } \alpha_2 = \pi + \beta - \arcsin\left(\frac{n\cdot\sin\beta}{v}\right) + \beta.$$

Tę sytuację ilustruje Rys. 7.

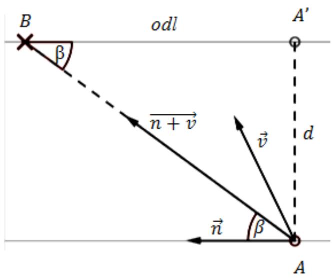


Rys. 7.

Zatem dla dowolnych n i v spełniających warunek $-v \leq n\sin\beta \leq v$ istnieją dwa rozwiązania rozważanego problemu.

- *Załóżmy, że znamy miarę kąta α, pod którym wypływamy i umiemy wyznaczyć szerokość rzeki, np. przy pomocy twierdzenia Talesa. Czy potrafimy ustalić miejsce, do którego dopłyniemy?*

  Załóżmy, że brzegi rzeki są częściowo proste. Niech $\vec{n}$ oznacza wektor nurtu rzeki, A punkt, w którym się znajdujesz, oraz A' punkt będący rzutem prostokątnym punktu A na przeciwległy brzeg. Szerokość rzeki wynosi d. Wypływasz z prędkością $\vec{v}$. Wektor $\overrightarrow{n+v}$ tworzy z $\vec{n}$ kąt β. Na drugim brzegu rzeki znajdować się będzie punkt B, do którego dopłyniesz. W zadaniu szukana jest odległość $odl := |A'B|$. Opisaną sytuację przedstawia Rys. 8.



Rys. 8.

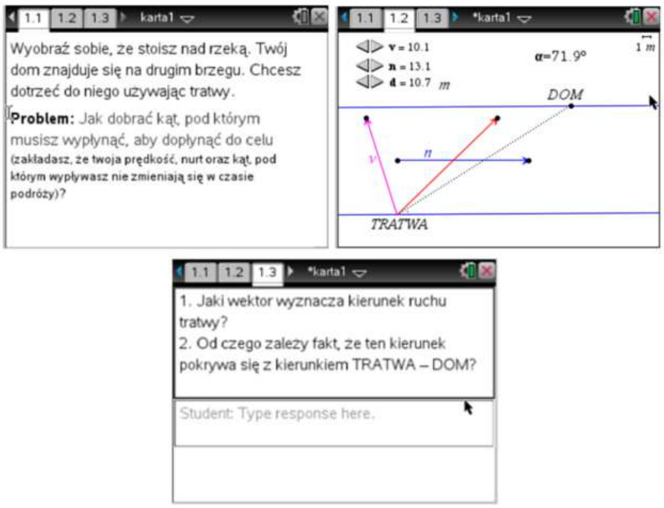
Aby znaleźć odl, wystarczy wyliczyć $\operatorname{tg}\beta = \frac{d}{odl}$. Stąd otrzymamy, że $odl = \frac{d}{\operatorname{tg}\beta}$. Poszukujemy zatem wartości tangensa kąta β. W tym celu należy rozwiązać równanie $\alpha = \arcsin\left(\frac{n \cdot \sin\beta}{v}\right) + \beta$ ze względu na β. Rachunek ten jest skomplikowany i nie będziemy go tu zamieszczać. W dalszych akapitach wyznaczymy szukaną odległość w inny sposób.

Problem „rwącej rzeki" jest zadaniem, które rodzi wiele różnych pytań. Przedstawiłam tylko przykładowe. Czytelnik zastanawiając się nad nimi może wykorzystać opisaną w pracy [5] metodę kruszenia, *która obejmuje zmianę tekstu zadania* (*podanie więcej lub mniej danych, wymiana danych, przekształcenie zadania, wprowadzenie nowych zależności, itp.*).

Przyjrzyjmy się jak może wyglądać praca nad tym zagadnieniem, gdy posiadamy kalkulator TI-*n*spire CX . Została ona podzielona na 5 etapów, każdy powinien kończyć się tym, że uczeń przesyła nauczycielowi uzyskane przez siebie wyniki obserwacji.

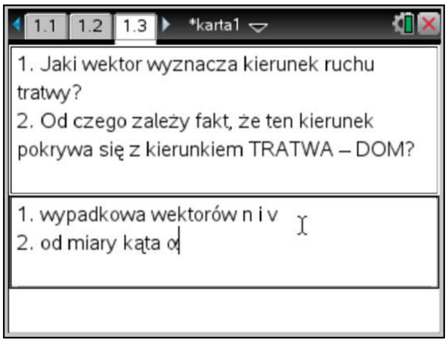
Na etapie pierwszym osoby rozwiązujące zapoznają się z zadaniem, mogą przeprowadzać eksperymenty. W tym miejscu powinna odbyć się próba matematyzacji zagadnienia. W drugim etapie poszukuje się warunków wystarczających na to, aby istniało rozwiązanie rozważanego zadania. Dyskusja liczby rozwiązań ma odbyć się w etapie trzecim. W etapach czwartym i piątym opracowuje się pewne modyfikacje zadania.

Etap pierwszy. Praca na tym etapie rozpoczyna się wraz z pierwszą kartą pracy. Dokument ten składa się z trzech zakładek (Rys. 9).



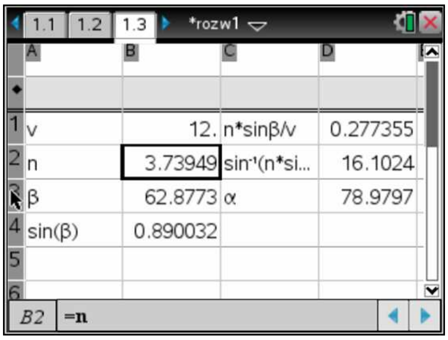
Rys. 9

W zakładce 1.1 znajduje się opis zagadnienia. W zakładce 1.2 jest symulacja przeprawy opisanej w zadaniu. Ostatnia zakładka zawiera pytania, których celem jest ustalenie warunków dotarcia do domu. W zakładce 1.2 przyjęto oznaczenia zgodne z oznaczeniami rysunków 5 i 6. Punkt $TRATWA$, z którego mamy startować, jest stały. Może znaleźć się w innym miejscu ekranu, jeżeli przesuniemy całą konstrukcję. Punkt DOM przesuwamy po prostej, na której się znajduje, a koniec wektora nurtu rzeki w poziomie, dzięki czemu zmieniamy długość tego wektora ($n := |\vec{n}|$) oraz jego zwrot. Ustalając długość wektora prędkości ($v := |\vec{v}|$) możemy, poruszając jego końcem, przemieszczać się po okręgu $o(TRATWA, v)$. Zauważmy w tym miejscu, że z warunków zadania wynika sensowność poruszania się końca wektora $\vec{v}$ po półokręgu zawartym w pasie wyznaczającym rzekę. W lewym górnym rogu ekranu kalkulatora znajdują się suwaki pozwalające na zmianę v i n, a także szerokości rzeki d. W prawym górnym rogu pojawia się miara kąta α, pod którym wypływamy. Zadanie uznamy za rozwiązane, jeżeli wypadkowa wektora prędkości i nurtu rzeki (czerwony wektor) znajdzie się na odcinku $TRATWA - DOM$. Pytania z zakładki 1.3 mają posłużyć do uświadomienia tego faktu. Oczekiwane są następujące odpowiedzi (Rys. 10).



Rys. 10

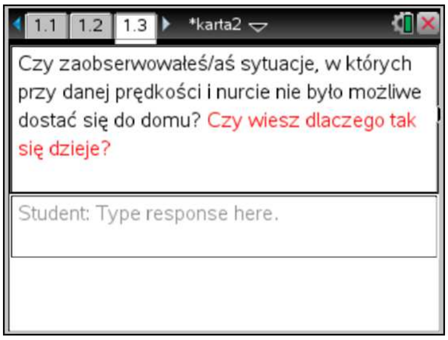
Za pomocą narzędzi dostępnych w arkuszu geometrii można wprowadzić wszystkie obiekty potrzebne do konstrukcji, natomiast w arkuszu kalkulacyjnym poprowadzić obliczenia związane z wyliczeniem miary kąta α (Rys. 11).



Rys. 11

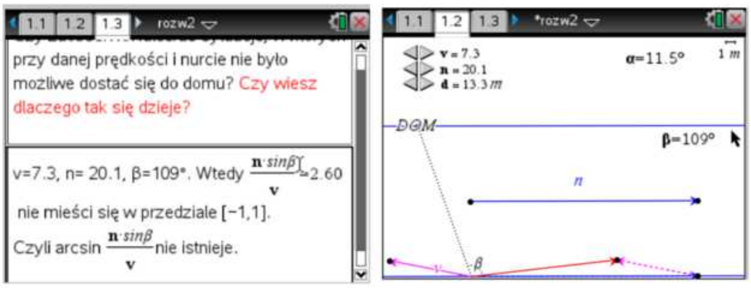
W trakcie symulacji, jakie może samodzielnie wykonać, uczeń powinien zauważyć, że ruch tratwy odbywa się zawsze w kierunku wyznaczonym przez sumę wektorów $\vec{v}$ i $\vec{n}$. Kierunek ten nie musi pokrywać się z kierunkiem $TRATWA - DOM$. Czy tak będzie, zależy z jednej strony od kąta, jaki wektor $\vec{v}$ tworzy z wektorem $\vec{n}$, a z drugiej od długości tych wektorów.

Etap drugi. Polega on na pracy z dokumentem składającym się także z trzech zakładek. W dwóch pierwszych znajduje się to, co poprzednio, to znaczy temat zadania (zakładka 1.1) i konstrukcja (zakładka 1.2) (Rys. 9). Trzecia zakładka (1.3) zawiera pytanie dotyczące sytuacji, które można było zaobserwować podczas pierwszego etapu pracy (Rys. 12).



Rys. 12

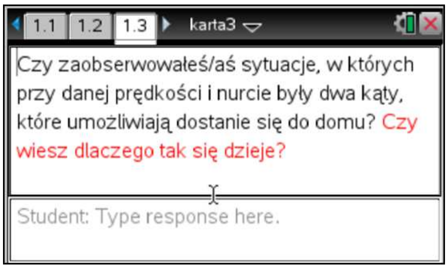
Jeżeli, bazując tylko na symulacjach z etapu poprzedniego, uczeń będzie miał trudności z odpowiedzią na pytanie z zakładki 1.3, to proponuje się otwarcie zakładki 1.2 celem znalezienia sytuacji, o których mowa w pytaniu.



Rys. 13

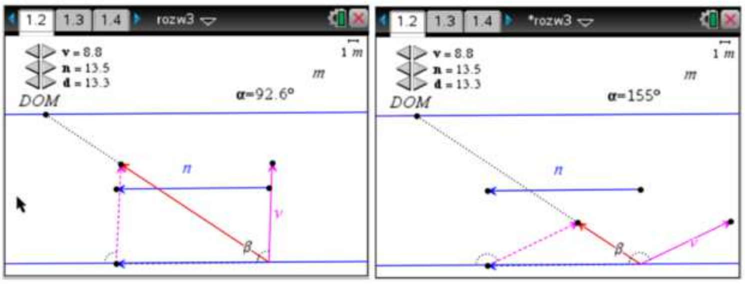
W prawej części Rys. 13 przedstawiono taki przykład: n jest znacznie większe niż v. Niezależnie od miary kąta α z przedziału $(0, \pi)$, suma wektorów $\vec{v}$ i $\vec{n}$ nie znajdzie się na kierunku $TRATWA - DOM$.

Etap trzeci. Poszukuje się tu sytuacji istnienia dwóch rozwiązań tego zadania (Rys. 14).



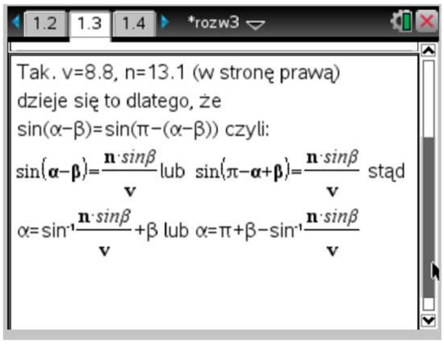
Rys. 14

Stosowny dokument składa się także z 3 zakładek. Pierwsza z nich zawiera temat zadania, druga symulację, a trzecia pytanie o istnienie więcej niż jednego rozwiązania (Rys. 14). Korzystając z symulacji, uczeń może odkryć, że istnieją dwa kąty umożliwiające dopłynięcie do celu (Rys. 15),



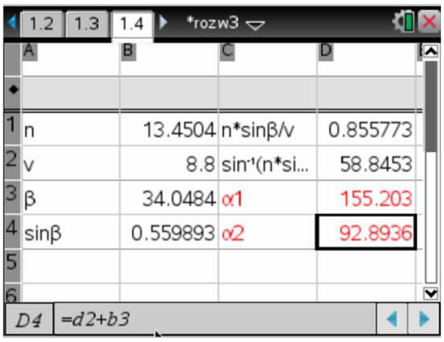
Rys. 15

a następnie udzielić odpowiedzi na pytanie (Rys. 16).



Rys. 16

Miary kątów, o których mowa powyżej, można wyznaczyć, używając arkusza kalkulacyjnego, w który wyposażony jest kalkulator (Rys. 17).

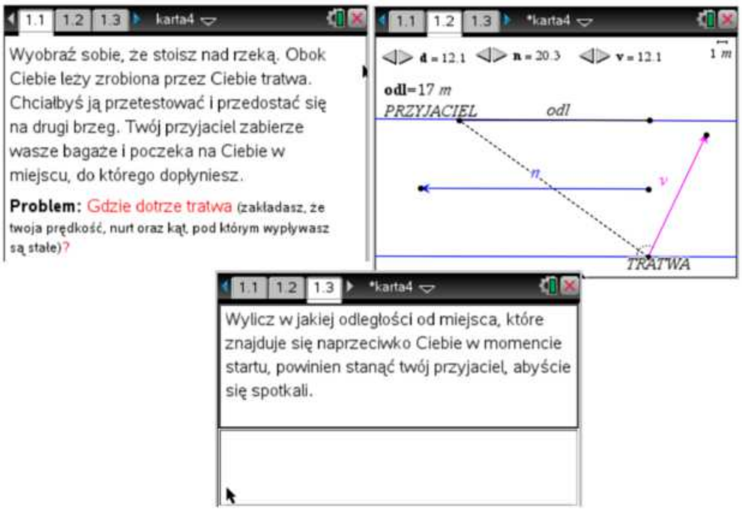


	A	B	C	D
1	n	13.4504	n*sinβ/v	0.855773
2	v	8.8	sin⁻¹(n*si...	58.8453
3	β	34.0484	α1	155.203
4	sinβ	0.559893	α2	92.8936

Rys. 17

Należy jednak pamiętać, że wartości wyliczone w arkuszu kalkulacyjnym i za pomocą symulacji nie zawsze będą takie same. Jest to spowodowane przybliżaniem do mniejszej liczby miejsc po przecinku w arkuszu geometrii, ale zwłaszcza tym, że wypadkową wektora prędkości i nurtu rzeki na odcinku $TRATWA - DOM$ „umieszczamy” ręcznie, czyli na tak zwane „oko”.

Etap czwarty. Poszukujemy obecnie miejsca, do którego dotrze tratwa przy zadanych wektorach $\vec{v}$ i $\vec{n}$ (Rys. 18).

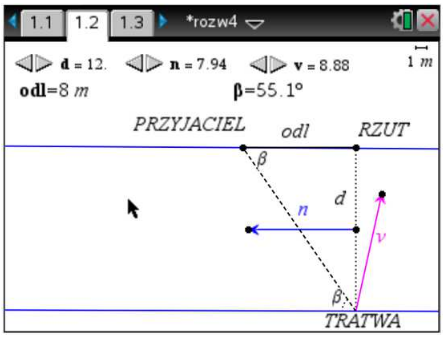


Rys. 18

Dokument na tym etapie (Rys. 18) zawiera: opis sytuacji (zakładka 1.1), stosowną symulację (zakładka 1.2) oraz miejsce na odpowiedź (zakładka 1.3). W zakładce 1.2 wprowadzono następujące oznaczenia: d - szerokość rzeki, $n := |\vec{n}|$, $v := |\vec{v}|$ oraz odl - poszukiwana odległość (od rzutu prostokątnego punktu $TRATWA$ na drugi brzeg do punktu $PRZYJACIEL$). Punkt $TRATWA$, z którego wyruszamy, jest stały, można go przesunąć tylko jeśli przesuniemy całą konstrukcję. Na górze ekranu znajdują się suwaki, które pozwalają zmieniać: d,v i n.

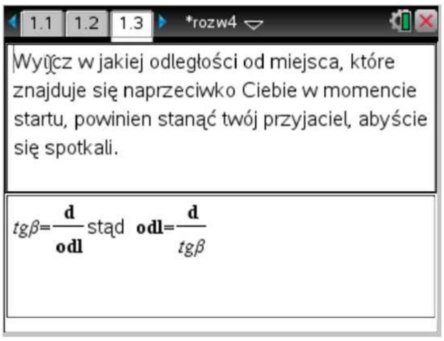
Położenie punktu $PRZYJACIEL$ zmienia się wraz ze zmianą wektorów $\vec{n}$ i $\vec{v}$. Wektory te możemy zmieniać tak samo jak w symulacjach z poprzednich etapów.

Rozwiązanie tego zadania mogłoby wyglądać następująco: po wprowadzeniu potrzebnych obiektów (na Rys. 19: zaznaczenie kąta β, d - szerokości rzeki oraz punktu $RZUT$) zauważamy, że powstał trójkąt prostokątny o wierzchołkach $TRATWA$, $PRZYJACIEL$ i $RZUT$.



Rys. 19

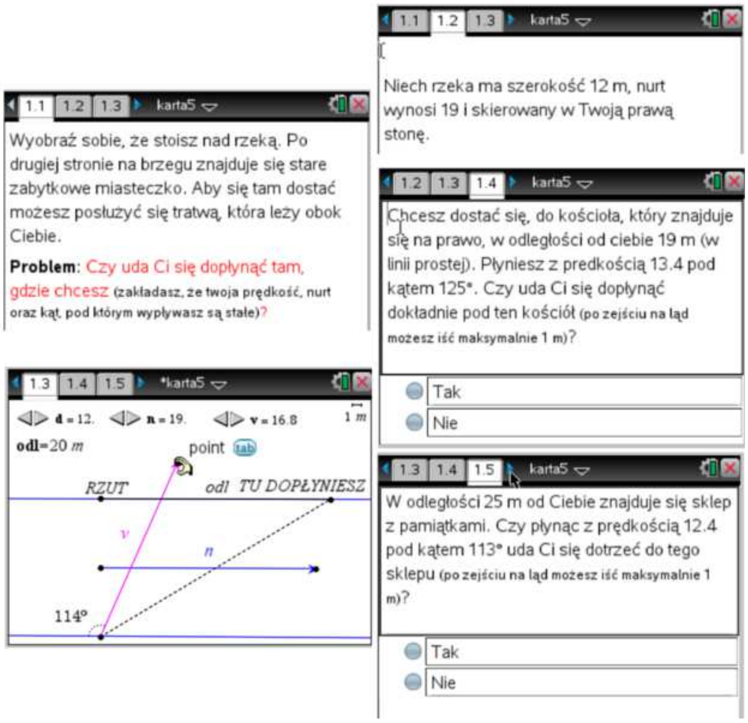
Stosując definicje funkcji trygonometrycznych dla kąta ostrego β, otrzymujemy rozwiązanie przedstawione na Rys. 20:



Rys. 20

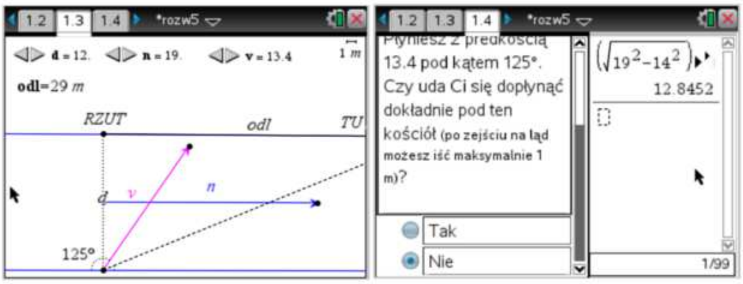
Zauważmy, że problem wyznaczenia miary tego kąta sprowadza się do użycia narzędzia do mierzenia kątów.

Etap piąty. Ostatni dokument udostępniany uczniom zawiera test z pytaniami typu: prawda/ fałsz. Składa się on z pięciu zakładek (Rys. 21):



Rys. 21

Dwie pierwsze ((1.1), (1.2)) zawierają sformułowanie problemu, w trzeciej (1.3) znajduje się symulacja pomocna przy uzupełnianiu testu, a dwie ostatnie ((1.4), (1.5)) to pytania z dwiema możliwymi odpowiedziami, z których tylko jedna jest poprawna. Symulacje sytuacji przedstawionych w zakładkach 1.4 i 1.5 pozwalają na wskazanie prawidłowych odpowiedzi.



Rys. 22

4. Uwagi końcowe

W mojej opinii kalkulator TI-*n*spire CX wydaje się być odpowiedni do użycia na lekcjach matematyki na drugim oraz kolejnych szczeblach edukacji. Praca z nim nie tylko może sprawić uczniom wiele przyjemności, lecz, co najważniejsze, podczas zabawy będą oni kształtować pojęcia i poszerzać swoją wiedzę.

Zauważmy, że stosowanie omówionego urządzenia ułatwia odkrycie rozwiązania zadania, ale obok znalezienia poprawnej odpowiedzi na pytanie istotnym jest także uzasadnienie poprawności, czyli rozumowanie. Wydaje się, że przygotowane przeze mnie karty pracy ułatwiają zrozumienie tematu oraz nakłaniają do argumentowania i dowodzenia odpowiedzi, które wynikają z symulacji.

Zastosowanie omawianego kalkulatora w rozwiązaniu zadań związanych z przeprawą przez „rwącą rzekę” daje możliwość symulacji tego doświadczenia przy różnych wartościach wektorów $\vec{v}$ i $\vec{n}$. Użycie narzędzi do mierzenia odcinków i miar kątów pozwala na eksperymentalne rozwiązywanie stawianych problemów. Uważam, że w tej sytuacji kalkulator ten stanowi rodzaj rusztowania dla osób, które mają braki związane np. z dodawaniem wektorów [4]. Osoby te, za pomocą symulacji omawianego zadania, mogą poznawać własności tego dodawania. Praca nawiązuje do innych publikacji prezentujących wykorzystanie technologii informacyjnej w nauczaniu matematyki np. [3].

Literatura

[1] J. Kozielecki, *Rozwiązywanie problemów*, PZWS, Warszawa, 1969.

[2] Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki cz. 3*, WSiP, Warszawa, 1977.

[3] M. Kucio, T. Ratusiński, *Examples of using interactive new technologies for supplement lacks of students knowledge*, Mathematics XVI, Scientific Issues Jan Długosz University in Częstochowa, Częstochowa, 2011, 313-320.

[4] B. Kutzler, *The Algebraic Calculator as a Pedagogical school for Teaching Mathematics*, IJCAME, 7(2000), 1, 5-23.

[5] J. Major, M. Major, *Crushing of the task in mathematics education AT various educational levels*, Acta Mathematica 15, FPV Univerzita Konštantína Filozofa, Nitra, 2012, 89 - 94.

[6] G. Polya, *Odkrycie matematyczne*, WNT, Warszawa, 1975.

[7] Z. Powązka, *Ein Beispiel für den Computergebrauch im Mathematikunterricht in der Grundschule in Polen*, Schriftenreihe Didaktik der Mathematik Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt 21, Computer - Mensch - Mathematik, Hölder - Pichler - Tempsky, Wiedeń, 1991, 207-210.

[8] S. Turnau, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa, 1990.

[9] *Uniwersalny Słownik języka polskiego*, PWN, Warszawa, 2003.

[1] *Instytut Matematyki*
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków,
E-mail: joasiapow@gmail.com

Przysłano: 29.06.2014; publikacja on-line: 14.11.2014.