Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 1 (2014), 21-25

Prace Koła Matematyków
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2014)

Beata Gawron[1]

Kwadratury Newtona–Cotesa

Streszczenie. W pracy przedstawiono pewne metody całkowania numerycznego. W szczególności omówione zostały ogólne pojęcie kwadratury oraz wzory pierwszego i drugiego rzędu dla kwadratur Newtona–Cotesa. Wzory te dzielą się na proste i złożone. Przedstawione w tej pracy rozważania teoretyczne oparte zostały na konkretnym przykładzie, który pokazuje, z jakim błędem mamy do czynienia w każdej z metod.

Abstract. In this work some methods of numerical integration are presented. In particular, a general concept of quadrature and formulas of first and second category for Newton–Cotes quadratures are discussed. It is worth to mention that these formulas fall into two categories: the simple and the complex ones. Theoretical knowledge is based on a specific example, which shows the error which we encounter in each method.

1. Wstęp

Zapewne wielu z nas, obliczając różnego rodzaju całki, czy to nieoznaczone, czy też oznaczone, napotkało niejednokrotnie jakiś problem. Najczęstszym utrudnieniem rozwiązania, na które osobiście też się natknęłam, było znalezienie funkcji pierwotnej. Dla niektórych funkcji całki po prostu nie istnieją, dla innych nie dają się zapisać za pomocą standardowych funkcji matematycznych. Mam tu na myśli klasę całek nieelementarnych, jak np. $\int e^{x^2}\,dx$, $\int \sin x^2\,dx$, $\int \cos x^2\,dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ czy $\sqrt{1-x^4}\,dx$. Ale gdybyśmy dodatkowo chcieli obliczyć całki oznaczone, to pojawia się jeszcze większy kłopot. Badacze poradzili sobie z nim w następujący sposób: Aby obliczyć takie całki, używa się tzw. kwadratur, czyli metod całkowania numerycznego, które dają przybliżony wynik.

AMS (2010) Subject Classification: 65D32.
Słowa kluczowe: całkowanie numeryczne, kwadratury, wzór trapezów, wzór Simpsona.

2. Kwadratury

Na początek rozważmy całki oznaczone funkcji jednej zmiennej postaci:

$$I_p(f) = \int\limits_a^b f(x)p(x)\ dx,$$

gdzie [a,b] jest przedziałem całkowania, funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w swej dziedzinie, natomiast $p\colon [a,b] \to [0,\infty)$ jest funkcją wagową, całkowalną w przedziale $[a,b]$. Funkcja wagowa jest dobierana tak, aby dobrze przybliżać całkę. Dla uproszczenia przyjmiemy tutaj, że $p(x) = 1$.

Wróćmy do pojęcia kwadratury. Wzór ogólny kwadratury wyraża się sumą:

$$Q(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

gdzie A_k są współczynnikami kwadratury, a punkty x_k są węzłami wyznaczającymi podział przedziału $[a,b]$, tzn. $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ [2]. Przypomnę tutaj, że metoda ta jest metodą przybliżoną, dlatego obarczona jest błędem. Jak nietrudno zauważyć, błędem będzie w tym przypadku różnica, a właściwie wartość bezwzględna różnicy pomiędzy dokładną wartością całki a wynikiem przybliżonym, a więc: $E(f) = |I(f) - Q(f)|$.

Omówię teraz szczególny przypadek kwadratur, a mianowicie kwadratury Newtona–Cotesa. Jeżeli węzły x_k są równoodległe, to funkcję f możemy zastąpić wielomianem Lagrange'a

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

a zatem

$$I(f) = \int\limits_a^b f(x)\ dx \approx \int\limits_a^b L_n(x)\ dx.$$

Taki sposób przybliżania funkcji podcałkowej nazywamy właśnie kwadraturą Newtona–Cotesa [2]. Węzły tej kwadratury wyznaczane są ze wzoru: $x_k = x_0 + \frac{b-a}{n} \cdot k$. Ogólny wzór na kwadraturę Newtona–Cotesa ma nadal postać sumy:

$$Q(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

z tym, że współczynniki A_k dane są wzorami:

$$A_k = \int\limits_a^b \prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}\ dx.$$

Wyróżnia się kwadratury proste, powstałe na bazie jednego przedziału całkowania, oraz kwadratury złożone [1].

2.1. Kwadratury proste

Dla kwadratury prostej rozważmy przypadek $n = 1$. Wtedy węzłami są punkty: $x_0 = a,\ x_n = b$. Po odpowiednim podstawieniu dostaniemy wzór trapezów:

$$Q(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

Dla przypadku $n = 2$ otrzymamy w podobny sposób wzór Simpsona postaci:

$$Q(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

2.2. Kwadratury złożone

Kwadratury złożone budowane są w następujący sposób:

1. Dzielimy przedział $[a, b]$ na N równych przedziałów $[x_i, x_{i+1}],\ i = 0, \ldots, N$.
2. Wyznaczamy węzły: $x_{ij} = x_i + \frac{x_{i+1}-x_i}{n} \cdot j,\ j = 0, \ldots, n$.
3. W każdym z przedziałów stosujemy kwadraturę Newtona–Cotesa.

Wzór ogólny na złożoną kwadraturę Newtona–Cotesa wygląda następująco:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{N-1} Q_i(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_{ij}).$$

Wyróżniamy tutaj, podobnie jak dla prostych wzorów, wzór złożony trapezów i wzór złożony Simpsona. Wzór złożony trapezów wyraża się poprzez funkcję:

$$Q(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{2}\left(f(x_k) + f(x_{k+1})\right).$$

Wzór złożony Simpsona zapisuje się tak:

$$Q(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{6}\left(f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1})\right).$$

W przypadku obu tych wzorów węzły mają postać: $x_i = a + \frac{b-a}{N} \cdot i,\ i = 0, \ldots, N$.

2.3. Przykład zastosowania

Po teoretycznym wprowadzeniu obliczymy czterema sposobami całkę $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$. Korzystając z jak najdokładniejszego przybliżenia tej całki (wyliczonym za pomocą programu Wolfram Alpha), spróbuję podać wartości błędów, zdefiniowanych wcześniej jako moduł różnicy wartości dokładnych i przybliżonych. Wyniki przedstawia poniższa tabela:

Metoda	**Wartość**	**Błąd**
Wzór trapezów	1,86	0,39735
Wzór Simpsona	1,476	0,01335
Złożony wzór trapezów	1,466	0,00335
Złożony wzór Simpsona	1,463	0,00035

Tabela 1: Wyniki

Wzory złożone zastosowane zostały dla przedziału podzielonego na 10 podprzedziałów. Przy obliczaniu błędu, za programem Wolfram Alpha zostało przyjęte założenie, iż: $\int_0^1 e^{x^2}\, dx \approx 1,46265$.

2.4. Uwagi

Nie sposób nie zauważyć, że najmniejszym błędem został obarczony złożony wzór Simpsona. Istotnie, okazuje się, że ta metoda liczenia całek jest najdokładniejsza spośród czterech przeze mnie wymienionych. Gdy dodatkowo jeszcze przedział całkowania podzielimy na odpowiednio dużą liczbę podprzedziałów, to możemy liczyć na dokładniejszy wynik. Wynika to z faktu, iż w metodzie Simpsona funkcję przybliżamy wykresem paraboli na danym podprzedziale, natomiast w metodzie trapezów, jak nazwa wskazuje, liczymy pole przybliżonego do wykresu funkcji trapezu. Podobne wzory istnieją dla $n = 3, 4, 5, 6$ i na ogół są jeszcze dokładniejsze od przytoczonych w tym artykule. Można je znaleźć w [3]. Pominęłam je w swoich rozważaniach, gdyż moim celem nie było prezentowanie wzorów, lecz zwrócenie uwagi czytelnika na zagadnienie kwadratur Newtona–Cotesa.

Mimo istnienia wielu metod całkowania numerycznego, poszukiwanie jak najdokładniejszej metody liczenia całek nieelementarnych jest niekończącym się wyzwaniem dla matematyków.

Literatura

[1] E. Dudek, L. Dutkiewicz, K. Grobler-Dębska, J. Wąs, *Metody numeryczne. Wybrane zagadnienia*, Wydawnictwo Naukowe AGH, Kraków, 2011.

[2] Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, WN-T, Warszawa, 1993.

[3] J. Stoer, *Wstęp do metod numerycznych*, Tom 1, PWN, Warszawa, 1979.

[1] *Instytut Matematyczno-Przyrodniczy*
PWSZ Tarnów
ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów
E-mail: bgawron2@wp.pl

Przysłano: 22.04.2014; publikacja on-line: 22.09.2014.