Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 1 (2014), 85-98

Prace Koła Matematyków
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2014)

Agnieszka Kowalska

O poszukiwaniach najlepszego wykładnika

Streszczenie. W 1889 roku A. Markov udowodnił, że dla każdego wielomianu p jednej zmiennej $\sup_{x\in[-1,1]}|p'(x)| \leq (\deg p)^2 \sup_{x\in[-1,1]}|p(x)|$. Ponadto wykładnik 2 w tej nierówności jest najlepszy możliwy. Nierówność ta i jej uogólnienia nadal stanowiąca przedmiot zainteresowania matematyków. Zaprezentujemy wybrane wyniki badań dotyczących wielowymiarowej nierówności Markowa i stycznej nierówności Markowa. W szczególności podamy przykłady zbiorów, które spełniają jedną z tych nierówności z optymalnym wykładnikiem.

Abstract. In 1889 A. Markov proved that for every polynomial p in one variable $\sup_{x\in[-1,1]}|p'(x)| \leq (\deg p)^2 \sup_{x\in[-1,1]}|p(x)|$. Moreover the exponent 2 in this inequality is the best possible. Markov's inequality and its generalizations are still the subject of many investigations. We present some results of research on the multivariate Markov inequality and tangential Markov inequality. We give examples of sets that admit one of these inequalities with sharp exponent.

1. Wstęp

Osoby niezajmujące się matematyką często uważają, że jest to dziedzina, w której wszystko zostało już odkryte. Tymczasem matematycy ciągle poszukują rozwiązań różnych problemów, czasem ściśle związanych z zastosowaniami, a czasem zupełnie teoretycznych. Starają się, żeby te rozwiązania, o ile istnieją, były możliwie najlepsze. Pytania nieustannie stawiane przez naukowców sprawiają, że matematyka to niekończące się wyzwanie. Jednym z takich zagadnień jest niewątpliwie badanie uogólnień nierówności Markowa. Jest to nierówność, która podaje oszacowanie pochodnej wielomianu na przedziale $[-1,1]$ za pomocą stopnia wielomianu i normy supremum tego wielomianu. Nierówność ta ma wiele zastosowań w różnych zagadnieniach matematyki i fizyki. Została między innymi wykorzystana w dowodzie Twierdzenia Bernsteina, które dotyczy aproksymacji funkcji

AMS (2010) Subject Classification: 41A17, 14P10, 41A25, 14P05.
Słowa kluczowe: nierówność Markowa, wykładnik Markowa, styczna nierówność Markowa.

ciągłych wielomianami ([27, str. 95]). Do najbardziej znanych zastosowań praktycznych tej nierówności podanych w [28] zaliczyć można: minimalizację czasu odpowiedzi wzmacniacza, zdolność rozdzielczą przyrządu optycznego oraz średnicę plamki światła rozproszonego przyrządu optycznego. Więcej na temat klasycznej nierówności Markowa i pewnych jej uogólnień w przypadku jednowymiarowym można znaleźć przykładowo w [21]. Oprócz nierówność Markowa znane są inne klasyczne nierówności dla pochodnych wielomianów. Najbardziej związane z tematyką tej pracy są nierówności Bernsteina dla wielomianów trygonometrycznych i algebraicznych oraz nierówność Schura. W monografii [8] znaleźć można wiele ciekawych informacji na temat tych i innych nierówności tego typu. Badania nierówności typu Markowa i Bernsteina są ściśle związane z problemami bardzo interesującej dziedziny matematyki - teorii aproksymacji (zob. [13], [27]). Badania uogólnień klasycznych nierówności dotyczyły w szczególności wielowymiarowego odpowiednika nierówności Markowa i poszukiwania najlepszego wykładnika w tej nierówności, zwanego wykładnikiem Markowa. Obecnie nierówność ta nadal jest uogólniana na wiele różnych sposobów, między innymi prowadzone są badania dla krzywych i podrozmaitości w $\mathbb{R}^N$ (Bos, Brudnyi, Levenberg, Milman, Taylor, Totik, Baran, Pleśniak, Kosek, Coman, Poletski, Gendre); dla zbiorów Julii (Kosek); w przestrzeniach Banacha (Sarantopoulos, Harris, Muñoz, Baran); w normach L^p (Tamarkin, Hille, Szegö, Goetgheluck, Baran, Sroka); w strukturach o-minimalnych (Pleśniak, Pierzchała). Więcej informacji na temat badań prowadzonych w związku z różnymi uogólnieniami nierówności Markowa, w szczególności obszerną literaturę dotyczącą tych zagadnień, znaleźć można w pracach przeglądowych jednego z najwybitniejszych specjalistów z tej dziedziny (zob. [25], [26], [29]). W tej pracy zajmiemy się krótkim omówieniem uogólnienia nierówności Markowa dla podrozmaitości, czyli stycznej nierówności Markowa. W szczególności podamy przykłady krzywych spełniających tę nierówność z optymalnym wykładnikiem.

2. Klasyczna nierówność Markowa

Klasyczna nierówność Markowa została wykazana w związku z badaniami sławnego rosyjskiego chemika. W 1887 roku Dmitrij Iwanowicz Mendelejew (1834–1907) pokazał, że zachodzi następującą nierówność:

Twierdzenie 1
Dla każdego wielomianu $P \in \mathbb{R}[x]$ stopnia drugiego mamy

$$\sup\{|P'(x)| \colon x \in [-1,1]\} \leq 4 \sup\{|P(x)| \colon x \in [-1,1]\}.$$

Nierówność tę wykorzystał w badaniach nad ciężarem właściwym roztworu w zależności od stężenia substancji rozpuszczanej.

Matematycy uznali spostrzeżenie Mendelejewa za interesujące i od lat zadają pytania związane z tym oszacowaniem. Oto podstawowe:

(P1) Czy stała 4 jest najmniejsza możliwa, czyli optymalna?

(P2) Czy podobne oszacowanie jest prawdziwe dla wielomianów dowolnego stopnia?

(P3) Czy dla wielomianów dowolnego stopnia da się podać oszacowanie optymalne?

(P4) Czy podobne oszacowanie jest prawdziwe dla innych zbiorów niż przedział $[-1,1]$?

Odpowiedzi na te pytania są już znane. Pytanie (P4) leży u podstaw badań różnych uogólnień nierówności Markowa, które stale trwają i rozwijają się w różnych kierunkach.

O tym, że oszacowanie Mendelejewa jest optymalne, świadczy następujący przykład:

Przykład 2
W celu wykazania, że nierówność ta nie jest spełniona dla każdego wielomianu ze stałą mniejszą niż 4, jest wskazanie wielomianu P, dla którego zachodzi równość, czyli

$$\sup\{|P'(x)| \colon x \in [-1,1]\} = 4 \sup\{|P(x)| \colon x \in [-1,1]\}.$$

Rozważmy wielomian $P(x) = 2x^2 - 1$. Wtedy

$$\sup\{|P'(x)| \colon x \in [-1,1]\} = \sup\{|4x| \colon x \in [-1,1]\} = 4 \sup\{|x| \colon x \in [-1,1]\} = 4$$

oraz

$$\sup\{|P(x)| \colon x \in [-1,1]\} = \max\{P(-1), P(0), P(1)\} = 1.$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że odpowiedź na pytanie (P1) jest twierdząca.

Odpowiedzi na drugie pytanie udzielił Andriej Andriejewicz Markow (1856–1922).

Twierdzenie 3 (Nierówność Markowa 1889)
Dla każdego wielomianu $P \in \mathbb{R}[x]$ mamy

$$\|P'\|_{[-1,1]} \leq [\deg P]^2 \|P\|_{[-1,1]},$$

gdzie $\|P\|_{[-1,1]} = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$.

Znanych jest kilka dowodów tej nierówności. Jeden z najciekawszych, wykorzystujący inną nierówność wielomianową – nierówność Bernsteina dla wielomia nów trygonometrycznych, znaleźć można w [27].

Podobnie jak wcześniej, optymalność oszacowania w nierówności Markowa można wykazać, wskazując wielomiany, dla których zachodzi równość. Okazuje się, że własność taką mają pewne szczególne wielomiany, które w roku 1854 znalazł Pafnutij Lwowicz Czebyszew (1821–1894), rozwiązując zadanie optymalizacji mechanizmu przenoszenia ruchu posuwistego tłoka w parowozie na ruch obrotowy kół. Czebyszew rozwinął teorię tych wielomianów.

Wielomiany Czebyszewa T_n, gdzie $n \in \mathbb{N}$ można zdefiniować rekurencyjnie:

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Na przedziale $[-1,1]$ możemy zapisać je w postaci trygonometrycznej: $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1,1]$. Wielomiany te okazały się bardzo przydatne w wielu zagadnieniach matematycznych i fizycznych. Korzystając z rekurencyjnej definicji łatwo można obliczyć kilka pierwszych wielomianów:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x,\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 - 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,\ T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1,$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x,\ T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1.$$

Znanych jest wiele ciekawych własności wielomianów Czebyszewa. Poniżej prezentujemy wybrane – najbardziej popularne lub przydatne w dowodzie optymalności nierówności Markowa.

1. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ funkcja T_n jest wielomianem stopnia n o współczynniku wiodącym 2^{n-1}.

2. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wielomian $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ jest unormowanym wielomianem stopnia n oraz dla dowolnego unormowanego wielomianu p stopnia n mamy

$$\sup\left\{\left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right| : x \in [-1,1]\right\} \leq \sup\{|p(x)| : x \in [-1,1]\},$$

   czyli wielomiany $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ są wielomianami, których maksymalna wartość na przedziale $[-1,1]$ jest najmniejsza spośród wszystkich wielomianów unormowanych tego samego stopnia.

3. Jeżeli n jest liczbą parzystą, to wielomian T_n jest funkcją parzystą. Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to wielomian T_n jest funkcją nieparzystą.

4. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\sup\{|T_n(x)| : x \in [-1,1]\} = |T_n(\cos \frac{\pi}{n})| = 1$.

5. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\sup\{|T_n'(x)| : x \in [-1,1]\} = |T_n'(1)| = n^2$.

Dowód własności 2, wykorzystujący nietrywialne twierdzenie o alternansie, znaleźć można w [27]. Dowody pozostałych własności mogą być prostym ćwiczeniem dla Czytelnika. Z własności 1., 4. i 5. wynika, że

$$\sup\{|T_n'(x)| : x \in [-1,1]\} = (\deg T_n)^2 \sup\{|T_n(x)| : x \in [-1,1]\},$$

czyli stała $[\deg P]^2$ w nierówności Markowa jest najmniejszą możliwą stałą.

Pozostaje pytanie dotyczące poszukiwań innych zbiorów mających taką własność. Naturalne jest pytanie, czy nierówność Markowa jest prawdziwa dla dowolnego przedziału domkniętego $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Rozważmy funkcję $\varphi : [-1,1] \to [a,b]$ zdefiniowaną wzorem $\varphi(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$. Wtedy dla każdego wielomianu $P \in \mathbb{R}[x]$ złożenie $P \circ \varphi$ jest wielomianem tego samego stopnia co wielomian P. Ponadto

$$\sup\{|(P \circ \varphi)(t)| : t \in [-1,1]\} = \sup\{|P(x)| : x \in [a,b]\}$$

oraz

$$\begin{aligned}\sup\{|(P\circ\varphi)'(t)|\colon t\in[-1,1]\} &= \sup\{|P'(\varphi(t))\varphi'(t)|\colon t\in[-1,1]\}\\ &= \frac{b-a}{2}\sup\{|P'(x)|\colon x\in[a,b]\}.\end{aligned}$$

Z tych rozważań i twierdzenia 3 wynika nierówność Markowa dla dowolnego przedziału domkniętego w $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 4
Dla każdego wielomianu $P\in\mathbb{R}[x]$ mamy

$$\|P'\|_{[a,b]}\le\frac{2}{b-a}(\deg P)^2\|P\|_{[a,b]}.$$

Otrzymaliśmy zatem oszacowanie z dodatkową stałą $M:=\frac{2}{b-a}$. Zauważmy, że stała ta zależy tylko od przedziału $[a,b]$ i jest właściwa dla każdego wielomianu.

3. Wykładnik Markowa

Nierówność Markowa dla dowolnego przedziału z pewną stałą M może sugerować wprowadzenie definicji własności ogólnie również dla podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^N$. W przypadku podzbiorów $\mathbb{R}^N$ będziemy badać oszacowanie dla wielomianów N zmiennych i w związku z tym szacować normę gradientu wielomianu zamiast pochodnej wielomianu jednej zmiennej.

Definicja 5 (Własność Markowa)
Mówimy, że zbiór zwarty $E\subset\mathbb{R}^N$ ma *własność Markowa z wykładnikiem* m, jeśli istnieje taka dodatnia stała M zależna tylko od zbioru E, że dla dowolnego wielomianu $P\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_N]$ spełniona jest nierówność

$$\|\operatorname{grad}P\|_E\le M(\deg P)^m\|P\|_E,$$

gdzie $\operatorname{grad}P=\left(\frac{\partial P}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial P}{\partial x_N}\right)$, $|\operatorname{grad}P|=\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{\partial P}{\partial x_j}\right|^2\right)^{1/2}$ i $\|\cdot\|_E$ jest normą supremum na zbiorze E.

Definicja ta jest istotnie rozszerzeniem definicji dla przypadku jednowymiarowego. Zauważmy, że dowolny przedział domknięty $[a,b]\subset\mathbb{R}$, gdzie $a<b$, ma własność Markowa z wykładnikiem 2. Definicję tę można postawić w przestrzeni $\mathbb{C}^N$, ale w tym artykule ograniczamy się do przypadku rzeczywistego. Łatwo zauważyć, że jeśli zbiór E ma własność Markowa z wykładnikiem m, to ma tę własność z dowolnym wykładnikiem większym od m. Interesować nas będzie poszukiwanie "najlepszego" wykładnika dla danego zbioru.

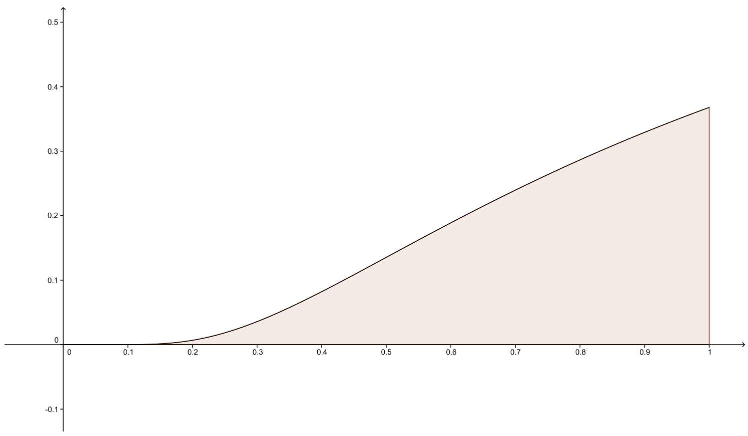
Definicja 6 (Wykładnik Markowa)
Wykładnik Markowa dla zbioru zwartego $E\subset\mathbb{R}^N$, który ma własność Markowa, jest równy

$$m(E)=\inf\{m>0\ :\ E \text{ ma własność Markowa z wykładnikiem } m\}$$

Jeśli zbiór E nie ma własności Markowa, to przyjmujemy $m(E) = +\infty$.

Pojęcie wykładnika Markowa dla zbioru zwartego w $\mathbb{C}^n$ zostało wprowadzone w [5]. Podano tam również ciekawe fakty związane z tym pojęciem w przypadku rzeczywistym. W szczególności wiadomo, że dla dowolnego zwartego podzbioru $E \subset \mathbb{R}^N$ wykładnik Markowa jest nie mniejszy niż 2. Ponadto, jeżeli E jest zwartym, wypukłym i tłustym (tzn. jeśli domknięcie wnętrza tego zbioru jest równe temu zbiorowi) podzbiorem $\mathbb{R}^N$, to $m(E) = 2$. Optymalna wersja nierówności Markowa dla wypukłych, symetrycznych podzbiorów $\mathbb{R}^N$ została wykazana w [1]. Dla wielu zbiorów wykładniki Markowa są znane. Ograniczymy się do przypadku rzeczywistego i zaprezentujemy wybrane przykłady. Rozpoczniemy od najbardziej znanego zbioru, który nie ma własności Markowa.

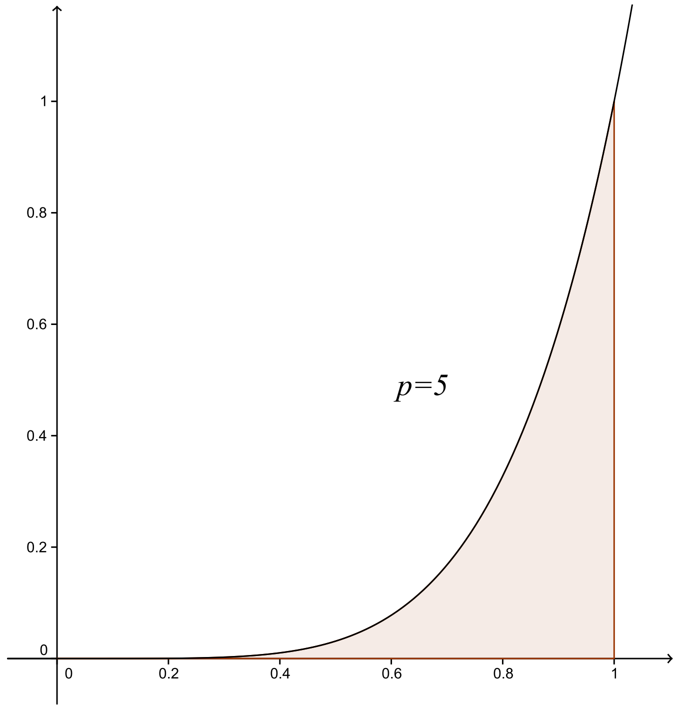
Przykład 7 ([32])
Rozważmy zbiór $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x \leq 1, \quad 0 < y \leq \exp(-\frac{1}{x})\} \cup \{(0, 0)\}$.



Wtedy $m(E) = \infty$.

Przykład ten pokazał, że zbiory z ostrzami mogą być pozbawione własności Markowa, ale poszukiwania zbiorów z ostrzami, które mają własność Markowa trwały nadal. Po 11 latach podano pierwszy przykład takich zbiorów.

Przykład 8 ([15])
Niech $E_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x^p\}$, gdzie $p \geq 1$.



Wtedy $m(E_p) = 2p$.

Przykład ten stał się inspiracją do badań własności Markowa na zbiorach z ostrzami wielomianowymi, prowadzonych w latach osiemdziesiątych ubiegłego wieku przez Pawłuckiego i Pleśniaka ([23]). Zaowocowały one bardzo ciekawymi rezultatami, które łączą ze sobą różne pozornie odległe działy matematyki (zob. [25], [29], [26] gdzie omówione są precyzyjnie te wyniki). W [24] podane zostało twierdzenie 3.3 wyjaśniające rolę zbiorów z własnością Markowa poprzez podanie warunków równoważnych z własnością Markowa dla klasy tzw. zbiorów C^∞ determinujących.

Definicja 9
Zbiór zwarty $E \subset \mathbb{R}^N$ nazywamy *determinującym dla funkcji klasy* $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, gdy dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$ zachodzi

$$f|_E = 0 \Longrightarrow D^\alpha f|_E = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N,$$

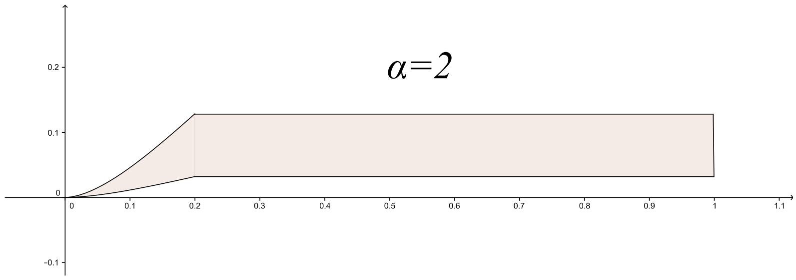
gdzie $D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$.

W szczególności, gdy $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, to mówimy, że E jest *determinujący dla funkcji klasy* $\mathcal{C}^\infty$ lub $\mathcal{C}^\infty$ *determinujący.*

Wiadomo, że jeśli zwarty podzbiór $\mathbb{R}^N$ ma własność Markowa, to musi być $\mathcal{C}^\infty$ determinujący ([24, Remark 3.5]). Problem, czy każdy zwarty, $\mathcal{C}^\infty$ determinujący podzbiór $\mathbb{R}^N$ ma własność Markowa, pozostaje nierozwiązany.

Znane są również przykłady zbiorów z własnością Markowa i z ostrzami, które nie są typu wielomianowego.

Przykład 10 ([19])
Niech $K_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \quad f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$, gdzie f_1, f_2 funkcje ciągłe na przedziale $[0,1]$, stałe na przedziale $[\frac{1}{5}, 1]$ oraz dla $0 < x \le \frac{1}{5}$ zachodzą równości $f_1(x) = \frac{1}{2}x^\alpha(-\ln x)$ i $f_2(x) = 2x^\alpha(-\ln x)$, gdzie $\alpha \ge 2$ jest liczbą wymierną.



Zbiory K_α to przykłady zbiorów, które są zwarte i tłuste, w punkcie $(0,0)$ mają ostrze, które nie jest wielomianowe, a mimo tego mają własność Markowa i $m(K_\alpha) \le 4k+2$, gdzie $\alpha = \frac{k}{l}$, k, l są względnie pierwszymi, dodatnimi liczbami naturalnymi.

Kolejny przykład pokazuje, że wykładnik Markowa zbioru E może nie być najmniejszym wykładnikiem, z którym zbiór ma własność Markowa.

Przykład 11 ([3])
Niech
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \le 1, \quad |y| \le \varphi(1-|x|)\},$$
gdzie $\varphi(t) = t\left(1 + \ln\frac{1}{t}\right)^{-1}$, $t \in [0,1]$.

Zbiór B ma własność Markowa i $m(B) = 2$, ale zbiór B nie ma własności Markowa z wykładnikiem 2.

4. Styczna nierówność Markowa

Zaproponowane w poprzedniej sekcji uogólnienie własności Markowa nie jest ciekawe dla zbiorów algebraicznych, czyli zbiorów zer wielomianów. Dla takich zbiorów nie uda się wykazać własności Markowa, bo dla wielomianu definiującego dany zbiór nie można wykazać takiej nierówności. Zobrazujemy to na prostym przykładzie.

Przykład 12
Rozważmy okrąg jednostkowy $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2-1 = 0\}$. Dla wielomianu $P(x,y) = x^2+y^2-1$ mamy $\|P\|_E = 0$ i $|\operatorname{grad} P| = |(2x, 2y)| = 4\sqrt{x^2+y^2}$. Stąd $\|\operatorname{grad} P\|_E = 4$. Oczywiście nie da się wskazać takiej stałej M, dla której $4 \le M \cdot 0$, więc okrąg nie ma własności Markowa.

Analogicznie będzie w przypadku innych niepustych zbiorów algebraicznych, wystarczy rozważyć wielomian definiujący dany zbiór. Ogólnie żaden zwarty podzbiór zbioru algebraicznego w $\mathbb{R}^N$ nie jest determinujący dla wielomianów, a tym bardziej nie jest $\mathcal{C}^\infty$ determinujący, więc nie spełnia warunku koniecznego dla własności Markowa. Ponadto, jeśli zbiór nie jest determinujący dla wielomianów, to musi być zawarty w pewnym zbiorze algebraicznym. Można byłoby uznać, że temat własności Markowa dla zbiorów algebraicznych jest zamknięty, ale okazało się, że dla tych zbiorów możemy rozważać inne ciekawe uogólnienie nierówności Markowa i wspomnianej we wstępie Nierówności Bernsteina dla wielomianów trygonometrycznych.

Twierdzenie 13 (Nierówność Bernsteina)
Dla każdego wielomianu trygonometrycznego T o wartościach rzeczywistych lub zespolonych zachodzi nierówność

$$\|T'\|_{\mathbb{R}} \leq [\deg T]\|T\|_{\mathbb{R}}.$$

Nierówności wielomianowe na zbiorach algebraicznych wiążą się z zagadnieniami aproksymacyjnymi dla takich zbiorów i korzeniami sięgają pionierskich prac Ragozina, z początku lat siedemdziesiątych XX wieku ([30] i [31]). Prace Ragozina zostały odkryte przez Autorów [12], co zdecydowanie rozwinęło aproksymację na zbiorach algebraicznych. Kluczową obserwacją było, że jeśli $P(x, y)$ jest wielomianem dwóch zmiennych stopnia n, to $T(\theta) = P(\cos\theta, \sin\theta)$ jest wielomianem trygonometrycznym stopnia n. Korzystając z Twierdzenia 13, otrzymamy zatem

$$\begin{aligned}|(-\sin\theta)D_1P(\cos\theta, \sin\theta) + \cos\theta D_2P(\cos\theta, \sin\theta)| &= |D_vP(\cos\theta, \sin\theta)|\\ &\leq n\|P(\cos\theta, \sin\theta)\|_{\mathbb{R}}\\ &= n\|P\|_{\mathbb{S}^1},\end{aligned}$$

gdzie $\mathbb{S}^1$ jest okręgiem jednostkowym w $\mathbb{R}^2$, a $v = (-\sin\theta, \cos\theta)$ jest wektorem stycznym do $\mathbb{S}^1$ w punkcie $(\cos\theta, \sin\theta)$. Tak zinterpretowana nierówność Bernsteina jest szczególnym przypadkiem następującej sytuacji.

Definicja 14 (Styczna nierówność Markowa)
Mówimy, że zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^N$ spełnia *styczną nierówność Markowa z wykładnikiem l*, jeśli istnieje taka dodatnia stała M, zależna tylko od K, że dla każdego wielomianu $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$ spełniona jest następująca nierówność:

$$\|D_{\mathcal{T}}P\|_K \leq M(\deg P)^l\|P\|_K,$$

gdzie $D_{\mathcal{T}}P$ oznacza pochodną wielomianu P w kierunku dowolnego wektora jednostkowego ze stożka stycznego do K.

Stożek styczny definiujemy w następujący sposób:

Definicja 15 (Stożek styczny)
Niech $K \subset \mathbb{R}^N$. Wektor $v \in \mathbb{R}^N$ nazywamy *stycznym do K w punkcie $a \in \overline{K}$*, jeśli istnieją takie ciągi punktów $a^j \in K$ i dodatnich liczb t_j, że

$$\lim_{j\to\infty} a^j = a \quad \text{i} \quad \lim_{j\to\infty} t_j(a^j - a) = v.$$

Zbiór wszystkich takich wektorów stycznych nazywamy *stożkiem stycznym do K w punkcie a.*

Styczna nierówność Markowa została wykorzystana do uzyskania następującej charakteryzacji podrozmaitości algebraicznych:

TWIERDZENIE 16 ([10])
Niech K będzie podrozmaitością klasy C^∞ w $\mathbb{R}^N$. Wtedy K spełnia styczną nierówność Markowa z wykładnikiem 1 *wtedy i tylko wtedy, gdy K jest zbiorem algebraicznym.*

Dla rozmaitości semialgebraicznych klasa C^∞ oznacza, że K nie może mieć punktów osobliwych. Autorzy podali również przykłady krzywych, które spełniają styczną nierówność Markowa z optymalnym wykładnikiem większym od 1, i przykłady krzywych, które nie spełniają tej nierówności.

PRZYKŁAD 17 ([11])
Rozważmy krzywe γ_r zadane równaniem $y = x^r$, $0 \leq x \leq 1$, gdzie $r \in \mathbb{R}$ i $r \geq 1$. Wtedy:

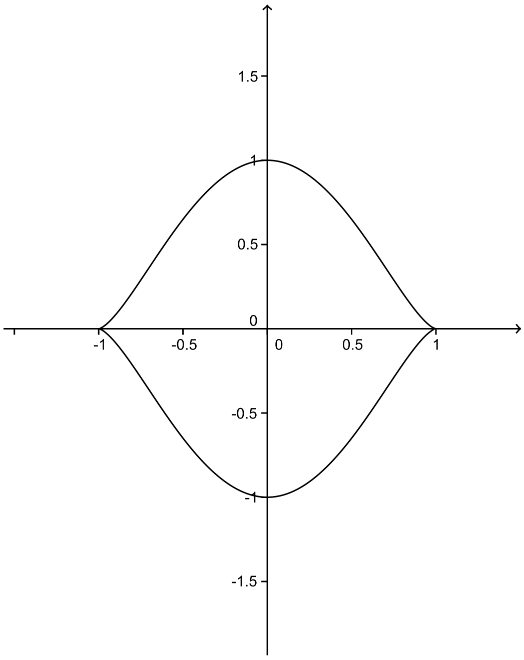
- Dla $r = \frac{q}{p}$, gdzie p, q takie dodatnie liczby naturalne, że $q \geq p$, krzywa γ_r spełnia styczną nierówność Markowa z optymalnym wykładnikiem równym $2p$.

- Dla niewymiernego parametru r krzywa γ_r nie spełnia stycznej nierówności Markowa.

Ponadto Baran i Pleśniak w [6] i [7] rozwiązali problem charakteryzacji zbiorów semialgebraicznych w klasie zbiorów subanalitycznych za pomocą innego uogólnienia nierówności Bernsteina i niezwykle pomysłowej modyfikacji pojęcia parametryzacji analitycznej, która rozwiązywała np. problem brzegu rozmaitości.

Można było przypuszczać, że styczna nierówność Markowa nie zachodzi na zbiorach, które nie są semialgebraiczne. Hipoteza ta jest jednak fałszywa, w [9] wykazano styczną nierówność Markowa z wykładnikiem 4 dla pewnych krzywych eksponencjalnych.

Dość długo nie było wiadomo, czy krzywe z osobliwościami spełniają styczną nierówność Markowa. W 2005 roku Gendre ([14]) pokazał, że dowolna krzywa algebraiczna z osobliwościami spełnia styczną nierówność Markowa z wykładnikiem zależnym od rodzaju tej osobliwości. Dowód tego faktu, ze względu na wykazanie tej zależności, jest dość skomplikowany. Prostszy dowód samej stycznej nierówności Markowa dla krzywych (semi)algebraicznych, z pominięciem zależności wykładnika od krotności osobliwości wykorzystujący twierdzenie Barana i Pleśniaka, znaleźć można w [20]. Z twierdzenia wykazanego w tej pracy wynika, że krzywa o równaniu $y^2 = (1-x^2)^3$ spełnia styczną nierówność Markowa z wykładnikiem 2.



Podana krzywa ma parametryzację $\varphi(t) = (\cos t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$ i dwa punkty osobliwe (czyli takie, dla których $\varphi'(t) = (0,0)$). Punktami tymi są $(1,0)$ i $(-1,0)$. Przykładowo dla punktu $(1,0)$, aby wyznaczyć wektor styczny, rozważamy inną parametryzację $\varphi_1(t) = (\cos\sqrt{t}, \sin^3\sqrt{t})$, $t \in [0, 2\pi]$. Wtedy $\lim\limits_{t\to 0} \varphi_1'(t) = (-1/2, 0)$ i w związku z tym jednostkowy wektor styczny w punkcie $(1,0)$ ma współrzędne $(-1,0)$. Zatem dla dowolnego wielomianu P pochodna kierunkowa w kierunku jednostkowego wektora stycznego w punkcie $(1,0)$ jest równa $-\frac{dP}{dx}$. Rozważając zdefiniowane wyżej wielomiany Czebyszewa i korzystając z tych samych własności, które zostały wykorzystane w dowodzie optymalności klasycznej nierówności Markowa, można wykazać, że wykładnik 2 jest optymalny. W analogiczny sposób można wykazać, że asteroida spełnia styczną nierówność Markowa z optymalnym wykładnikiem 2.

Korzystając z twierdzenie Barana i Pleśniaka dla zbiorów wyższego wymiaru, podobną metodą udowodniono w [20] styczną nierówność Markowa dla powierzchni semialgebraicznych ze skończoną liczbą punktów osobliwych. Problem, czy powierzchnie semialgebraiczne, których zbiorem punktów osobliwych jest krzywa, spełniają styczną nierówność Markowa pozostaje nierozwiązany i zapewne będzie badany w przyszłości.

5. Uwagi na temat wykładnika Markowa w normach L^p

Zagadnienia związane z poszukiwaniem optymalnego wykładnika są trudniejsze i przez to jeszcze ciekawsze, jeśli rozważamy nierówności typu Markowa, w których zamiast normy supremum występują normy L^p. W tym przypadku znacznie więcej pytań pozostaje bez odpowiedzi.

Pierwszą nierównością wielomianową uogólnioną na normy L^p była nierówność Bernsteina dla wielomianów trygonomertycznych.

Twierdzenie 18 (Nierówność Zygmunda [33])
Dla dowolnego $p \in [1, \infty)$ i dla dowolnego wielomianu trygonometrycznego T zachodzi nierówność

$$\|T'\|_p \leq (\mathrm{deg}T)\|T\|_p,$$

gdzie $\|T\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |T(\theta)|^p d\theta \right)^{1/p}$.

Klasyczna nierówność Markowa w normach L^p została wykazana kilka lat później.

Twierdzenie 19 ([18])
Dla dowolnego $p \in [1, \infty)$ i dla dowolnego wielomianu P stopnia co najwyżej n zachodzi nierówność

$$\|P'\|_p \leq C(n, p)n^2\|P\|_p,$$

gdzie $\|P\|_p = \left(\int\limits_{-1}^{1} |P(x)|^p dx \right)^{1/p}$ *oraz* $C(n, 1) = 2(1 + (1/n))^{n+1}$ *i* $C(n, p) = 2(p-1)^{(1/p)-1}(p + (1/n))[1 + p/(np - p + 1)]^{n-1+1/p}$ *dla* $p > 1$.

Podobnie jak w przypadku normy supremum, wykorzystując pewne szczególne wielomiany, można wykazać, że wykładnik 2 jest optymalny ([17]). Jednak uzyskane w Twierdzeniu 19 stałe $C(n, p)$ nie są najmniejsze możliwe. Obecnie znane są wersje tej nierówności z lepszymi stałymi ([17] i [2]). Badania związane z wykładnikiem Markowa w normach L^p były również prowadzone dla wielowymiarowej wersji własności Markowa. Wiadomo, że dla zbiorów tłustych, które mają brzeg lokalnie lipschitzowski wykładnik Markowa w normie L^p, jest równy 2 ([16]). Ponadto Goetgheluck wykazał nierówność Markowa w normie przestrzeni L^p dla zbiorów z ostrzami wielomianowymi ([15]). Nie wiadomo, czy uzyskany wynik jest optymalny, ale jest cenny ze względu na wykorzystane metody, które okazują się przydatne w wielu sytuacjach. W przypadku norm L^p nie jest znany optymalny wykładnik Markowa dla zbiorów z ostrzami, ale w związku z poszukiwaniem takiego wykładnika odkrytych zostało szereg ważnych zależności, między innymi tożsamości wielomianowe Milówki i ich uogólnienia wykazane przez Barana i Ozorkę ([22], [4]). Pytania dotyczące własności Markowa w normach L^p mogą dotyczyć również stycznej nierówności Markowa dla zbiorów (semi)algebraicznych. Obecnie nie jest znany przykład optymalnego wykładnika w stycznej nierówności

Markowa w normach L^p. Nie wiadomo również, jaki jest związek między wykładnikiem dla normy supremum i norm L^p w przypadku stycznej nierówności Markowa. Można przypuszczać, że poszukiwania najlepszego wykładnika w stycznej nierówności Markowa dla norm L^p i badanie zależności z nim związanych będą również w tym przypadku fascynującym wyzwaniem, które będzie prowadziło do odkrycia szeregu interesujących faktów.

Literatura

[1] M. Baran, *Bernstein Type Theorems for Compact Sets in* $\mathbb{R}^n$ *Revisited*, J. Approx. Theory 79(1994), nr 2, 190–198.

[2] M. Baran, *New approach to Markov inequality in* L^p *norms*, Approximation Theory, Monogr. Textbooks Pure and Applied Mathematics, vol. 212, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel-Hong Kong, 1998, 75–85, (in memory of A. K. Varma).

[3] M. Baran, L. Białas-Cież, B. Milówka, *On the Best Exponent in Markov Inequality*, Potential. Anal. 38(2013), nr 2, 635–651.

[4] M. Baran, B. Milówka, P. Ozorka, *Markov's property for kth derivative*, Ann. Polon. Math. 106(2012), 31–40.

[5] M. Baran, W. Pleśniak, *Markov's exponent of compact sets in* $\mathbb{C}^n$, Proc. Amer. Math. Soc. 123(1995), nr 9, 2785–2791.

[6] M. Baran, W. Pleśniak, *Bernstein and van der Corput-Schaake type inequalities on semialgebraic curves*, Studia Math. 125(1997), 83–96.

[7] M. Baran, W. Pleśniak, *Characterization of compact subsets of algebraic varieties in terms of Bernstein type inequalities*, Studia Math. 141(2000), 221–234.

[8] P. Borwein i T. Erdélyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Springer Verlag, New York 1996.

[9] L. P. Bos, A. Brudnyi, N. Levenberg, V. Totik, *Tangential Markov inequalities on transcendental curves*, Constructive Approximation 19(2003), nr 3, 339–354.

[10] L. Bos, N. Levenberg, P. Milman, B. A. Taylor, *Tangential Markov inequalities characterize algebraic submanifolds of* $\mathbb{R}^N$, Indiana Univ. Math. Journal 44(1995), nr 1, 115–138.

[11] L. Bos, N. Levenberg, P. Milman, B. A. Taylor, *Tangential Markov inequalities on real algebraic varieties*, Indiana Univ. Math. J. 47(1998), 1257–1272.

[12] L. P. Bos, N. Levenberg i B. A. Taylor, *Characterization of smooth, compact algebraic curves in* $\mathbb{R}^2$, in: Topics in Complex Analysis, P. Jakóbczak and W. Pleśniak (eds.), Banach Center Publ. 31, Inst. Math., Polish Acad. Sci., Warszawa, 1995, 125–134.

[13] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, Mc Grow-Hill Book Comp., New York 1966.

[14] L. Gendre, *Inégalités de Marcov tangentielles locales sur les courbes algébriques singuliéres de* $\mathbb{R}^n$, Ann. Polon. Math. 86(2005), 59–77.

[15] P. Goetgheluck, *Inégalité de Markov dans les ensembles efillés*, J. Approx. Theory 30(1980), 149–154.

[16] P. Goetgheluck, *Markov's Inequality on Locally Lipschitzian compact subsets of* $\mathbb{R}^N$ *in* L^p*-spaces*, J. Approx. Theory 49(4)(1987), 303–310.

[17] P. Goetgheluck, *On the Markov Inequality in L^p-spaces*, J. Approx. Theory 62(2)(1990), 197–205.

[18] E. Hille, G. Szegö, J. Tamarkin, *On some generalisation of a theorem of A. Markoff*, Duke Math. J 3(1937), 729–739.

[19] M. Jędrzejowski, *Markov inequality on certain compact subset of* $\mathbb{R}^2$, Univ. Iagel. Acta Math. 43(2005), 93–98.

[20] A. Kowalska, *Tangential Markov inequalites on semialgebraic curves and some semialgebraic surfaces*, Ann. Polon. Math. 106(2012), 215–222.

[21] G. V. Milanowić, T. M. Rassias, *On Markov-Duffin-Schaeffer inequalities*, J. Nat. Geometry 5(1994), 29–41.

[22] B. Milówka, *Markov's inequality and a generalized Pleśniak condition*, East J. Approx. 11(2005), nr. 3, 291-300.

[23] W. Pawłucki i W. Pleśniak, *Markov's inequality and C^∞ functions on sets with polynomial cups*, Math. Ann. 275(1986), 467–480.

[24] W. Pleśniak, *Markov's inequality and the existence of an extension operator for C^∞-functions*, Journal of Approximation Theory 61(1990), nr 1, 106–117.

[25] W. Pleśniak, *Zastosowania nierówności Markowa w analizie różniczkowej*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II Wiadomości Matematyczne XXIX(1990), 39-46.

[26] W. Pleśniak, *Recent progress in multivariate Markov inequality*, Approximation Theory, 449–464, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 212, Dekker, New York, 1998.

[27] W. Pleśniak, *Wykłady z teorii aproksymacji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2000.

[28] W. Pleśniak, *Czebyszew, Weierstrass, Jackson, Bernstein i ich kontynuatorzy*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II Wiadomości Matematyczne XL(2004), 97–106

[29] W. Pleśniak, *Inégalité de Markov en plusieurs variables*, Int. J. Math. Math. Sci. vol. 2006, Art. ID 24549, 1–12.

[30] D. L. Ragozin, *Polynomial Approximation On Compact Manifolds And Homogeneous Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 150(1970), 41–53.

[31] D. L. Ragozin, *Constructive Polynomial Approximation on Spheres and Projective Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 162(1971), 157–170.

[32] M. Zerner, *Développment en séries de polynômes ortonormaux des fonctions indéfiniment différentiables*, C. R. Acad. Sci., Série I. Mathématique 268(1969), 218–220.

[33] A. Zygmund, *A remark on conjugate functions*, Proceedings of the London Math. Soc. 34(1932), 392–400.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
Adres ul. Podchorążych 2
E-mail: kowalska@up.krakow.pl

Przysłano: 27.07.2014; publikacja on-line: 14.11.2014.