Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 2 (2015), 45-56

Prace Koła Matematyków Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2015)

Aurelia Bartnicka[1]

Dynamika topologiczna widocznych punktów kratowych

Streszczenie. Przedstawiamy problem fotografa – polega on na tym, by na jednej wspólnej fotografii były widoczne twarze wszystkich członków zespołu, który stoi na kracie. Pytamy więc, które punkty kraty $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ są widoczne, gdy stoimy w środku układu współrzędnych (tzn. nie są „zasłonięte" przez żaden inny punkt kratowy). Podajemy charakteryzację zbioru widocznych punktów kratowych V oraz jego własności, w tym związek jednej z nich z dzetą Riemanna. Ze zbiorem V stowarzyszamy topologiczny układ dynamiczny i podajemy jego własności, będące odpowiednikami części topologicznej programu badawczego zaproponowanego przez Sarnaka dla tzw. układu bezkwadratowego [15].

Abstract. We consider the problem of a photographer who needs to depict all members of a band standing on a lattice on a group photo. Thus, we ask, which points of the lattice $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ are visible for us when we stand in the origin that is, which points can be connected to the origin $(0, 0)$ not passing through any other point of $\mathbb{Z}^2$. We give a characterization of the set of visible lattice points V and list its properties, including the relation of one of them the Riemann zeta function. We associate with V a topological dynamical system, explore its properties analogous to the topological part of Sarnak's program for the so-called square-free system [15].

1. Wstęp

Wyobraźmy sobie zespół muzyczny, którego członkowie podczas parady stoją w równych odstępach od siebie w pionie i w poziomie – tak jak na poniższym zdjęciu. Fotograf (znajdujący się w tej samej płaszczyźnie co zespół) chce wykonać jak najmniej zdjęć (najlepiej tylko jedno!) tak, aby twarz każdego członka zespołu była widoczna na co najmniej jednej fotografii.

AMS (2010) Subject Classification: 54H20; 06B30.
Słowa kluczowe: krata, dynamika topologiczna, widoczne punkty kratowe, problem fotografa, program Sarnaka.

Rys. 1. Parada Bożonarodzeniowa w Hollywood, (źródło: http://thehollywoodchristmasparade.org/)

W modelu matematycznym reprezentujemy członka zespołu jako punkt kraty $\mathbb{Z}^2$ i mówimy, że jest widoczny, jeśli żaden inny członek zespołu nie jest na linii łączącej go z fotografem. To jest uproszczenie, bo niektóre proste mogą nie przechodzić przez punkt kraty, ale być bardzo blisko niego. Wówczas twarz członka zespołu może być zasłonięta. Nie będziemy się tym przejmować w dalszych rozważaniach. Zespół dla nas to prostokąt punktów kratowych wymiaru $r \times s$ z wierzchołkami $(1,1), (r,1), (1,s), (r,s)$. Oznaczmy go przez $\Delta_{r,s}$, a fotografa będziemy utożsamiać z punktem kratowym na zewnątrz tego prostokąta.

2. Widoczne punkty kratowe

Definicja 1
Kratą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy dyskretną podgrupę, która rozpina przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^n$.

Kratą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest podgrupa $\mathbb{Z}^n$. Będziemy rozważać $n = 2$ i kratę $\mathbb{Z}^2$.

Definicja 2
Dwa punkty kraty P i Q są **wzajemnie widoczne**, jeśli na odcinku je łączącym nie ma innego punktu kratowego.

Fakt 3
Różne punkty $P = (a_1, a_2)$ i $Q = (b_1, b_2)$ są wzajemnie widoczne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{nwd}(a_1 - b_1, a_2 - b_2) = 1$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\mathrm{nwd}(a_1 - b_1, a_2 - b_2) = 1$. Bez utraty ogólności możemy zakładać, że $a_1 \neq b_1$, bo $P \neq Q$. Jeśli $a_2 = b_2$, to $|a_1 - b_1| = 1$ i znów bez utraty ogólności otrzymujemy $b_1 = a_1 + 1$. To znaczy, że $P = (a_1, a_2)$, $Q = (a_1 + 1, a_2)$ i natychmiast widać, że P i Q są wzajemnie widoczne. Będziemy więc w dalszym ciągu zakładać, że $a_1 \neq b_1$ oraz $a_2 \neq b_2$. Przypuśćmy, że punkt $(c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2$ różny od P i Q leży na odcinku łączącym punkty P i Q, tzn.

$$c_1 = t(a_1 - b_1) + b_1, \ c_2 = t(a_2 - b_2) + b_2 \in \mathbb{Z} \text{ dla pewnego } t \in (0, 1).$$

Otrzymujemy więc

$$t(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) = (c_1 - b_1)(a_2 - b_2) = (c_2 - b_2)(a_1 - b_1).$$

Ponieważ $\mathrm{nwd}(a_1 - b_1, a_2 - b_2) = 1$, wynika stąd, że $(a_1 - b_1)|(c_1 - b_1)$ (oraz $(a_2 - b_2)|(c_2 - b_2)$). Zatem $t \in \mathbb{Z}$, co jest niemożliwe, bo $t \in (0, 1)$. Stąd P i Q są wzajemnie widoczne.

Załóżmy, że $d := \mathrm{nwd}(a_1 - b_1, a_2 - b_2) > 1$. Wówczas $t(a_1, a_2) + (1 - 1/d)(b_1, b_2)$ jest punktem kratowym (różnym od P i Q) leżącym na odcinku łączącym P i Q. Stąd P i Q nie są wzajemnie widoczne.

Odpowiemy teraz na pytanie, w jakim miejscu na kracie powinien stanąć fotograf, aby postawione zadanie było realizowane przez pojedyncze zdjęcie, na którym będą widoczni wszyscy członkowie zespołu.

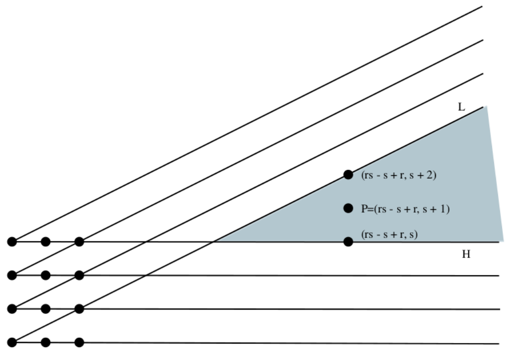
Definicja 4
Mówimy, że prostokąt punktów kratowych $\Delta_{r,s}$ jest **widoczny z punktu** P, jeśli żaden odcinek pomiędzy P i punktem z $\Delta_{r,s}$ nie zawiera innego punktu z $\Delta_{r,s}$.

Twierdzenie 5 ([12])
Prostokąt $\Delta_{r,s}$ *jest widoczny z punktów* $P = (rs - s + r, s + 1)$ *oraz* $Q = (r + 1, rs - r + s)$.

Dowód. Oznaczmy przez $\mathcal{L}$ zbiór wszystkich prostych łączących pary punktów w $\Delta_{r,s}$. Pokażemy, że P i Q nie leżą na żadnej prostej z $\mathcal{L}$. Wystarczy to pokazać dla P – analogiczną własność dla Q otrzymamy zamieniając pierwszą i drugą współrzędną na kracie $\mathbb{Z}^2$ rolami. Zauważmy, że prosta L, łącząca punkty $(1, 1)$ i $(r, 2)$ ma najmniejszy dodatni kąt nachylenia w $\mathcal{L}$ (patrz Rys. 2.). Prosta H o równaniu $y = s$ ma największą rzędną punktu przecięcia z osią y spośród wszystkich prostych równoległych do osi x zawartych w $\mathcal{L}$. Żadna linia w $\mathcal{L}$ nie przechodzi przez obszar poniżej L i powyżej H, bo gdyby przechodziła, to jej kąt nachylenia byłby dodatni i mniejszy niż kąt nachylenia prostej L, ale to przeczy wyborowi prostej L jako tej o najmniejszym dodatnim kącie nachylenia w $\mathcal{L}$. Na prostej L leży punkt $(rs - s + r, s + 2)$, a na prostej H leży punkt $(rs - s + r, s)$. Zatem P leży poniżej L, a powyżej H.

Z powyższego twierdzenia wynika w szczególności, że dowolnie duży zespół stojący na kracie można sfotografować na jednym wspólnym zdjęciu, stojąc w odpowiednim punkcie kratowym. Nasuwa się teraz pytanie, czy można na jednym wspólnym zdjęciu sfotografować zespół o nieskończonej liczbie członków. Rozważmy sytuację, w której fotograf stoi w punkcie $(0, 0)$. Które osoby stojące w pozostałych punktach kraty $\mathbb{Z}^2$ fotograf może sfotografować?

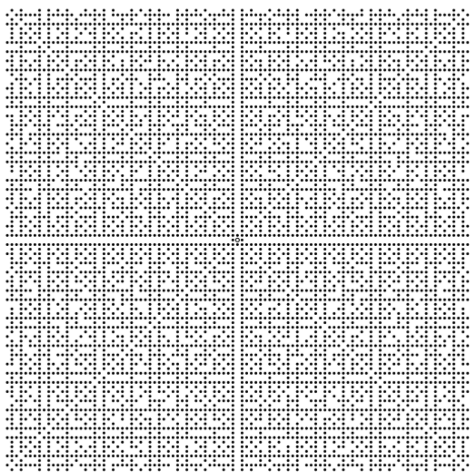
Przez V oznaczmy zbiór punktów kratowych widocznych z punktu $(0, 0)$. Z Faktu 3 wynika, że punkt $P = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ jest widoczny z punktu $(0, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{nwd}(a_1, a_2) = 1$, tzn. $V = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 : \mathrm{nwd}(n, m) = 1\}$. W szczególności, zbiór V jest nieskończony, bo istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych względnie pierwszych – fotograf stojący w punkcie $(0, 0)$ będzie więc w stanie sfotografować zespół o nieskończonej liczbie członków, jeśli tylko będą oni stali w punktach ze zbioru V.



Rys. 2. Na podstawie [12]

3. Własności widocznych punktów kratowych

Przedstawimy teraz podstawowe własności zbioru widocznych punktów kratowych.



Rys. 3. Widoczne punkty kraty $\mathbb{Z}^2$ (rysunek pochodzi z pracy [3])

Twierdzenie 6 (Proposition 1 w [3])
Zbiór V ma następujące własności:

1. *V zawiera „dziury" dowolnego rozmiaru, które powtarzają się okresowo.*
2. *$V - V = \mathbb{Z}^2$*
3. *Naturalna gęstość zbioru V istnieje tzn. istnieje granica $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{\#(V\cap([-N,N]\times[-N,N])}{(2N+1)^2}$ i jest równa $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$, gdzie ζ oznacza dzetę Riemanna*

Zanim podamy dowód powyższego twierdzenia, przypomnijmy Chińskie Twierdzenie o Resztach, którego będziemy używać.

Twierdzenie 7
Niech $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$ będą parami względnie pierwsze oraz $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$. Wówczas istnieje takie $x \in \mathbb{Z}$, że

$$\begin{cases} x \equiv n_1 \bmod m_1 \\ \ldots \\ x \equiv n_k \bmod m_k. \end{cases}$$

Dowód. 1. Niech $s \in \mathbb{N}$ oraz $m_1, \ldots, m_s$ będą parami względnie pierwsze. Wtedy z Chińskiego Twierdzenia o Resztach, dla dowolnych $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{Z}^2$, istnieje $a \in \mathbb{Z}^2$ takie, że

$$a + a_i \equiv 0 \bmod m_i\mathbb{Z}^2 \text{ tzn. } a + a_i \in m_i\mathbb{Z}^2,$$

dla każdego $1 \leqslant i \leqslant s$. Równoważnie $a + a_i \notin V$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant s$. Okresowość „dziur" w V wynika z tego, że dla powyższego a każde $a + km_1m_2\ldots m_s(1,1)$ spełnia warunek $a + a_i \notin V$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant s$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2. Jasne jest, że $V - V \subset \mathbb{Z}^2$. Z drugiej strony dla każdego $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ mamy $(x_1, x_2) = (x_1 + 1, 1) - (1, 1 - x_2)$, gdzie $(x_1 + 1, 1), (1, 1 - x_2) \in V$. Zatem $\mathbb{Z}^2 \subset V - V$.

3. Niech $N(r)$, $N'(r)$ będą odpowiednią liczbą wszystkich punktów oraz liczbą punktów widocznych w kwadracie $\{(x,y) : |x| \leqslant r, |y| \leqslant r\}$. Wówczas $N'(r) = 8 \sum\limits_{1\leqslant n\leqslant r} \varphi(n)$, gdzie φ jest funkcją Eulera, tzn. funkcją zliczającą dla liczby naturalnej liczby względnie pierwsze z nią i nie większych od niej. Korzystając z równości $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant r} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}r^2 + O(r\log r)$ (patrz Theorem 3.7 w [2]) i $N(r) = (2[r]+1)^2 = (2r + O(1))^2 = 4r^2 + O(r)$, otrzymujemy

$$\frac{N'(r)}{N(r)} = \frac{\frac{24}{\pi^2}r^2 + O(r\log r)}{4r^2 + O(r)} = \frac{\frac{6}{\pi^2} + O(\frac{\log r}{r})}{1 + O(\frac{1}{r})} \to \frac{6}{\pi^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \text{ przy } r \to \infty.$$

Uwaga 8
Dla funkcji $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, takich, że $g(n) > 0$ dla każdego $n \geqslant N$, $N \in \mathbb{N}$, zapis $O(g) = f$ oznacza, że istnieje $M > 0$ takie, że

$$|f(n)| \leqslant Mg(n) \text{ dla każdego } n \geqslant N.$$

Uwaga 9
Dowód punktu 3. pochodzi z [2] (patrz Theorem 3.9).

4. Układ dynamiczny stowarzyszony ze zbiorem punktów widocznych

Definicja 10
Topologicznym układem dynamicznym (w skrócie układem) nazywać będziemy zwartą przestrzeń metryczną X z homeomorfizmami tej przestrzeni $(T_g\colon X \to X)_{g\in G}$, gdzie G jest nieskończoną, przeliczalną grupą dyskretną, gdy:

$$\forall_{g,h\in G}\ T_g \circ T_h = T_{g+h},$$

$$\forall_{x\in X}\ T_e x = x, \text{ gdzie } e \text{ jest elementem neutralnym grupy } G.$$

Niech $G = \mathbb{Z}$ lub $G = \mathbb{Z}^2$ oraz $\Omega := \{0,1\}^G$. Na ciągach z Ω określamy przesunięcia (shifty) $S_n\colon \Omega \to \Omega$ następująco:

$$S_n((x_m)_{m\in G}) = (y_m)_{m\in G},$$

gdzie $(x_m)_{m\in G} \in \Omega$ oraz $y_m = x_{m+n}$ dla każdego $n \in G$. Wyposażmy Ω w topologię produktową pochodzącą od topologii dyskretnej na $\{0,1\}$. Dla ustalenia uwagi połóżmy

$$d(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}},$$

gdzie $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ oraz

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{Z}^2},(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}) = \min\{1, 2^{-\max\{n\in\mathbb{N}\,:\, x_{(m_1,m_2)}=y_{(m_1,m_2)}, \forall_{m_i\in\mathbb{Z}} |m_i|\le n \text{ dla } i=1,2\}}\},$$

gdzie $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^2},(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^2} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$. W obu przypadkach w rozpatrywanej metryce punkty są bliskie siebie, gdy są identyczne na dostatecznie wielu miejscach o niskich modułach indeksów.

Podamy dwa kluczowe dla nas przykłady układów. Pierwszy to będzie układ bezkwadratowy, a drugi to układ widocznych punktów kratowych.

Niech $\mathcal{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych oraz $\mu\colon \mathbb{Z} \to \{-1,0,1\}$ będzie określone następująco

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = \pm 1,\\ (-1)^r, & \text{gdy } n = \pm p_1 \cdots p_r\ (p_i \neq p_j, i \neq j) \text{ oraz } p_i \in \mathcal{P},\\ 0, & \text{gdy istnieje takie } p \in \mathcal{P}, \text{ że } p^2|n. \end{cases}$$

Funkcja μ nazywana jest funkcją Möbiusa[1]. Dla $G = \mathbb{Z}$ przyjmijmy oznaczenie $\eta := \mu^2$
Dla $G = \mathbb{Z}^2$ niech $\eta := \mathbb{1}_V$, gdzie $\mathbb{1}_V$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru V tzn. $\mathbb{1}_V(a) = \begin{cases} 1, a \in V,\\ 0, a \notin V. \end{cases}$

[1] Zwykle $\mu(n)$ definiuje się dla $n \in \mathbb{N}$ – my rozszerzamy tę definicję dla wygody do $n \in \mathbb{Z}$.

Niech X_η będzie domknięciem (w topologii indukowanej przez metrykę d) orbity elementu η, czyli zbioru $\{S_n\eta : n \in G\}$. Ze względu na definicję zbioru X_η, przesunięcia jego elementów nie wyprowadzają poza ten zbiór, więc możemy dalej rozpatrywać funkcje S_n prowadzące z X_η w X_η dla dowolnego $n \in G$. Właśnie dla układu $((S_n)_{n\in G}, X_\eta)$ w obu przypadkach $G = \mathbb{Z}$ i $G = \mathbb{Z}^2$ sformułujemy program Sarnaka.

W przypadku $G = \mathbb{Z}$ zbiór X_η możemy opisać również w inny sposób:

$$X_\eta = \{x \in \Omega : \forall_{m\in\mathbb{Z}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{k\in\mathbb{Z}}\ x[m, m+n] = \eta[m+k, m+n+k]\},$$

gdzie $x[m, m+n] \in \{0,1\}^{n+1}$ (nazywane blokiem na x) oznacza kolejnych $n+1$ (począwszy od m-tego) wyrazów ciągu $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Można wysłowić ten warunek następująco: każdy blok pojawiający się na x, pojawia się na η. Rzeczywiście, jeśli $x \in X_\eta$ i B jest blokiem na x, to x jest granicą ciągu postaci $(S_{n_k}\eta)_{k\in\mathbb{N}}$ dla pewnego $\{n_k\} \subset \mathbb{Z}$. Zgodnie z własnością metryki d, znajdziemy takie n_k, że na $S_{n_k}\eta$ blok B jest w tym samym miejscu co na x. Skoro blok B pojawia się na pewnym przesunięciu η, to na η również, zatem spełnia żądany warunek. Odwrotnie, jeśli $x \in \{y \in \Omega\ :\ \forall_{m\in\mathbb{Z}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{k\in\mathbb{Z}}\ y[m, m+n] = \eta[m+k, m+n+k]\}$, to w szczególności dla bloku $x[-k, k]$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, istnieje $n_k \in \mathbb{Z}$ takie, że $x[-k, k] = \eta[n_k - k, n_k + k]$. Wiemy, że $\eta[n_k - k, n_k + k] = S_{n_k}\eta[-k, k]$, więc zgodnie ze zbieżnością w metryce d element x jest granicą ciągu $S_{n_k}\eta$. Zatem $x \in X_\eta$.

Analogicznie możemy scharakteryzować X_η dla $G = \mathbb{Z}^2$.

5. Przygotowanie do sformułowania Programu Sarnaka

Podamy niezbędne do sformułowania programu Sarnaka definicje.

Definicja 11
Zbiór $A \subset X_\eta$ nazywamy **minimalnym**, gdy jest domknięty, $(S_n)_{n\in G}$-niezmienniczy ($S_nA = A$ dla każdego $n \in G$) oraz jest najmniejszym w sensie inkluzji niepustym zbiorem o tych własnościach.

Uwaga 12
Na Ω rozpatrujemy σ-algebrę zbiorów borelowskich, czyli najmniejszą σ-algebrę zawierającą zbiory otwarte w topologii indukowanej na Ω przez metrykę d. Zbiór X_η jako domknięty jest mierzalny, więc mówimy, że jego podzbiór jest mierzalny, gdy jest przekrojem X_η z pewnym mierzalnym podzbiorem Ω.

Definicja 13
Faktorem topologicznym układu $((S_n)_{n\in G}, X_\eta)$ nazywamy każdy układ $((T_n)_{n\in G}, Y)$, dla którego istnieje ciągła surjekcja $\tau\colon X_\eta \to Y$ taka, że dla każdego $n \in G$ poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "S_n"] \arrow[d, "\tau"'] & X \arrow[d, "\tau"'] \\ Y \arrow[r, "T_n"] & Y \end{tikzcd}$$

Uwaga 14
Układ $((S_n)_{n\in G}, X_\eta)$ jest swoim faktorem, bo surjekcją z powyższej definicji jest na przykład odwzorowanie identycznościowe. Układ jednopunktowy $((T_n)_{n\in G}, \{y\})$, gdzie $T_n y = y$ dla każdego $n \in G$, jest faktorem układu $((S_n)_{n\in G}, X_\eta)$: wystarczy wziąć odwzorowanie stałe $\tau \equiv y$.

W dalszej części będzie mowa o **faktorze równociągłym**, czyli spełniającym następujący warunek:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{n\in G}\ \forall_{x,y\in Y}\ d(x,y) < \delta \Rightarrow d(T_n x, T_n y) < \ \varepsilon.$$

Uwaga 15
Układ $((T_n)_{n\in G}, Y)$ jest równociągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest izometrią, tzn. istnieje równoważna z początkową (T_n)-niezmiennicza metryka na Y, czyli istnieje metryka $D\colon Y \times Y \to [0,\infty)$ taka, że dla każdego $x, y \in Y$ i dla każdego $n \in G$ mamy $D(T_n x, T_n y) = D(x,y)$. Rzeczywiście, jeśli istnieje równoważna z początkową (T_n)-niezmiennicza metryka na Y, to za δ w definicji równociągłości można wziąć ε. Z kolei, gdy układ jest równociągły, to wystarczy położyć jako nową metrykę $D(x,y) = \sup\limits_{n\in G} \rho(T_n x, T_n y)$, która jest (T_n)-niezmiennicza, a równociągłość pozwala udowodnić, że D jest równoważna wyjściowej metryce ρ.

Definicja 16
Układ $((T_n)_{n\in G}, Y)$ nazywamy **proksymalnym**, gdy dla każdego $x, y \in Y$ istnieje ciąg równowartościowy $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset G$ taki, że $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(T_{n_k} x, T_{n_k} y) = 0$, gdzie ρ oznacza metrykę na Y.

Uwaga 17
Proksymalność oznacza, że dla każdego wyboru pary punktów ich orbity zbliżają się do siebie, ale tylko wzdłuż pewnego podciągu (wzdłuż innego mogą się od siebie oddalać).

Uwaga 18
Jedynym proksymalnym układem równociągłym jest układ jednopunktowy, bo w układzie równociągłym dla każdego $n \in G$ odległość między $T_n x$ i $T_n y$ wynosi tyle, co odległość między x i y.

Definicja 19
Maksymalny faktor równociągły układu $((S_n)_{n\in G}, X_\eta)$ jest to faktor równociągły, dla którego każdy równociągły faktor układu $((S_n)_{n\in G}, X_\eta)$ jest również faktorem. Nazywamy go trywialnym, gdy jest jednopunktowy.

Uwaga 20
Zauważmy, że faktor jednopunktowy jest równociagły.

Definicja 21
Połączeniem topologicznym między układami $((S_n)_{n\in G}, X_\eta)$ a $((T_n)_{n\in G}, Y)$ nazywamy zbiór $W \subset X_\eta \times Y$, który jest domknięty, $(S_n \times T_n)_{n\in G}$-niezmienniczy oraz jego rzuty na współrzędne są pełne, czyli są równe X_η i Y odpowiednio. Mówimy, że połączenie jest nietrywialne, gdy $\emptyset \subsetneq W \subsetneq X_\eta \times Y$

Uwaga 22
Pojęcie to jest uogólnieniem pojęcia wykresu surjekcji działającej z X_η do Y. Zauważmy, że $X_\eta \times Y$ jest połączeniem topologicznym.

6. Program Sarnaka

6.1. Program Sarnaka dla układu bezkwadratowego

W tej części sformujemy podany w 2010 roku (patrz [15]) program Sarnaka dla układów bezkwadratowych i wyjaśnimy pojęcia w nim użyte lub odeślemy do definicji z wcześniejszego paragrafu. Niech $G = \mathbb{Z}$.
Program Sarnaka dla układu bezkwadratowego:

1. Punkt η jest punktem generującym $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$niezmienniczej probabilistycznej miary ν_η na $\{0,1\}^\mathbb{Z}$ o zerowej entropii Kołmogorowa ν_η na $\{0,1\}^\mathbb{Z}$.
2. Entropia topologiczna układu $((S_n)_{n\in\mathbb{Z}}, X_\eta)$ wynosi $\frac{6}{\pi^2}$.
3. Zbiór X_η jest równy $\{x \in \Omega \ : \ \forall_{p\in\mathcal{P}} \ |\mathrm{supp}\ x \bmod p^2| < p^2\}$, gdzie $\mathrm{supp}\ x = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ x(n) \neq 0\}$ oraz $\mathcal{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych.
4. Układ $((S_n)_{n\in\mathbb{Z}}, X_\eta)$ jest proksymalny i $\{(\ldots,0,0,0,\ldots)\}$ jest jedynym podzbiorem minimalnym (patrz Definicje 16 i 11).
5. Maksymalny faktor równociągły układu $((S_n)_{n\in\mathbb{Z}}, X_\eta)$ jest trywialny (patrz Definicje 13 i 19 oraz Uwaga 14), ale $((S_n)_{n\in\mathbb{Z}}, X_\eta)$ ma nietrywialne połączenie topologiczne (patrz Definicja 21) z obrotem na zwartej grupie abelowej $\mathbb{G} = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Miara probabilistyczna ν, o której istnieniu mówi punkt 1 programu Sarnaka jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia to znaczy, że dla każdego mierzalnego zbioru $B \subset \Omega$ oraz dla każdego $n \in G$ mamy $\nu(S_nB) = \nu(B)$. Zerową entropię Kołmogorowa miary ν_η możemy rozumieć jako przejaw determinizmu (braku chaosu) w układzie $((S_n)_{n\in G}, X_\eta, \nu)$ (ścisłą definicję entropii Kołmogorowa można znaleźć w 14. rozdziale w [9]). Wreszcie, punkt η jest generujący dla miary ν_η, czyli

$$\forall_{f\in C(\{0,1\}^\mathbb{Z})} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S_n\eta) = \int_{\{0,1\}^\mathbb{Z}} f \mathrm{d}\nu_\eta,$$

gdzie $C(\{0,1\}^\mathbb{Z})$ zbiór funkcji ciągłych określonych na $\{0,1\}^\mathbb{Z}$ i o wartościach rzeczywistych.
Przez entropię topologiczną (patrz punkt 2 programu Sarnaka) w tym przypadku rozumiemy wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 \left(|\{A \in \{0,1\}^n \ : \ \exists_{x\in X_\eta} \ \exists_{m\in\mathbb{Z}} \ \forall_{1\leqslant k\leqslant n} \ x(k+m) = A(k)\}| \right),$$

czyli zliczamy dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$, ile bloków n-elementowych pojawia się na elementach X_η (a w zasadzie na η, bo wiemy, że każdy blok pojawiający się na elemencie z X_η pojawia się również na η), a potem logarytmujemy i uśredniamy przez n. Otrzymany wynik $\frac{6}{\pi^2}$ mówi nam, że dla wystarczająco dużych $n \in \mathbb{N}$ więcej niż $2^{\frac{n}{2}}$ różnych bloków długości n pojawia się na η.

Klasyczną definicję entropii topologicznej można znaleźć w 14. rozdziale w [9]. W tym samym miejscu jest podana charakteryzacja entropii topologicznej, którą tutaj przyjęliśmy za definicję. Przez obrót na $\mathbb{G}$ rozumiemy, że mamy odwzorowanie $R\colon \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, zdefiniowane następująco:

$$R(g_1, g_2, \ldots) = (g_1 + 1, g_2 + 1, \ldots),$$

gdzie $g = (g_1, g_2, \ldots) \in \mathbb{G}$.

Uwaga 23
Zauważmy, że każdy faktor topologiczny $((T_n)_{n\in G}, Y)$ układu proksymalnego, którym jest $((S_n)_{n\in G}, X_\eta)$ (zgodnie z 3 punktem programu Sarnaka), jest także proksymalny, ponieważ dla każdych $y, y' \in Y$ istnieją $x, x' \in X_\eta$ takie, że $\tau(x) = y$ i $\tau(x') = y'$. Z kolei z proksymalności układu $((S_n)_{n\in G}, X_\eta)$ mamy ciąg $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset G$ taki, że $\lim\limits_{n_k\to\infty} d(S_{n_k}x, S_{n_k}x') = 0$ dla dowolnej metryki d na X_η. Z ciągłości τ wnosimy, że
$\lim\limits_{k\to\infty} \rho(\tau(S_{n_k}x), \tau(S_{n_k}x')) = 0$, gdzie ρ oznacza metrykę na Y. Z definicji faktora topologicznego mamy, że $\tau(S_{n_k}x) = T_{n_k}\tau(x) = T_{n_k}y$ i $\tau(S_{n_k}x') = T_{n_k}\tau(x') =$ $= T_{n_k}y'$. Wobec tego $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(T_{n_k}y, T_{n_k}y') = 0$ dla dowolnej metryki ρ na Y, więc układ $((T_n)_{n\in G}, Y)$ jest także proksymalny.

Uwaga 24
Dowód punktu 1 programu Sarnaka można znaleźć w [6], punktów 2 i 3 w [13], 4 i 5 w [11] (dla pewnego uogólnienia układu bezkwadratowego).

6.2. Program Sarnaka dla widocznych punktów kratowych

Okazuje się, że dla układu $((S_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}, X_\eta)$ zachodzą analogiczne tezy jak dla układu bezkwadratowego.
Program Sarnaka dla widocznych punktów kratowych

1. Punkt η jest punktem generującym $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}$-niezmienniczej probabilistycznej miary ν_η na $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ o zerowej entropii Kołmogorowa.

2. Entropia topologiczna układu $((S_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}, X_\eta)$ wynosi $\frac{6}{\pi^2}$.

3. Zbiór X_η jest równy $\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \ : \ \forall_{p\in\mathcal{P}} \ |\operatorname{supp} x \bmod p\mathbb{Z}^2| < p^2\}$ oraz $\operatorname{supp} x = \{n \in \mathbb{Z}^2 \ : \ x(n) \neq 0\}$.

4. Układ $((S_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}, X_\eta)$ jest proksymalny i $\{\mathbf{0}\}$ jest jedynym podzbiorem minimalnym (patrz Definicje 16 i 11), gdzie $\mathbf{0} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ i $\mathbf{0}(n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}^2$.

5. Maksymalny faktor równociągły $((S_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}, X_\eta)$ jest trywialny (patrz Definicje 13 i 19 oraz Uwaga 14), ale $((S_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}, X_\eta)$ ma nietrywialne połączenie topologiczne (patrz Definicja 21) z obrotem na zwartej grupie abelowej $\mathbb{G} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}^2/p\mathbb{Z}^2$.

Po zrozumieniu punktów programu Sarnaka dla układu bezkwadratowego wystarczy przytoczyć kilka definicji w zmienionej postaci. Punkt η jest generujący dla miary ν_η, czyli

$$\forall_{f\in C(\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2})} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} f(S_{(n,m)}\eta) = \int_{\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}} f \mathrm{d}\nu_\eta,$$

gdzie $C(\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2})$ zbiór funkcji ciągłych określonych na $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ i o wartościach rzeczywistych.
W tym przypadku entropia topologiczna układu $((S_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}, X_\eta)$ jest równa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \log_2 \left(|\{A \in \{0,1\}^{F_n} \ : \ \exists_{x\in X_\eta} \exists_{m\in\mathbb{Z}^2} \forall_{k\in F_n} \ x(k+m) = A(k)\}| \right),$$

gdzie $F_n = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ |x_1|, |x_2| \leqslant n\}$. W dowodzie korzysta się z równości $X_B = X_\eta$ i dzięki temu powyższa granica jest równa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \log_2 \left(|\{W \subset F_n \ : \ \forall_{p\in\mathcal{P}} \ |W \bmod p\mathbb{Z}^2| < p^2\}| \right).$$

Grupa $\mathbb{Z}^2$ działa na $\mathbb{G} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}^2/p\mathbb{Z}^2$ przez obroty następująco: $T_n(g_1, g_2, \ldots) = (g_1 + n, g_2 + n, \ldots)$, gdzie $g = (g_1, g_2, \ldots) \in \mathbb{G}, n \in \mathbb{Z}^2$.
Połączenie topologiczne stanowi $W := \bigcup_{x\in X_\eta} \left(\{x\} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} (\mathbb{Z}^2 \setminus \mathrm{supp}\ x)/p\mathbb{Z}^2 \right)$.

Uwaga 25
Pełne dowody tez ze sformułowania programu Sarnaka dla $((S_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}, X_\eta)$ można znaleźć w szerszym kontekście w [14] (sformułowania 1-3) oraz w [3] (pozostałe). Dowody programu Sarnaka w jeszcze szerszym kontekście ciał liczbowych znajdują się w [4].

Uwaga 26
W punkcie 5 programu Sarnaka użyte jest słowo 'ale', ponieważ ma ono podkreślać różnicę między zachowaniem odpowiadających pojęć z miarowej dynamiki. Mianowicie faktorom równociągłym odpowiadają faktory Kroneckera, które są obrotami, więc w teorii miarowej jeśli maksymalny faktor Kroneckera (patrz Rozdział 3. w [5]) jest trywialny, to układ początkowy nie może mieć nietrywialnego połączenia z obrotem, więc nie można przepisać tego stwierdzenia na język miarowy.

Literatura

[1] E. H. El Abdalaoui, M. Lemańczyk, and T. de la Rue, *A dynamical point of view on the set of $\mathscr{B}$-free integers*, International Mathematics Research Notices (published online), (2014).

[2] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[3] M. Baake and C. Huck, *Ergodic properties of visible lattice points*, arXiv: 1501.01198, 2014.

[4] A. Bartnicka, J. Kułaga-Przymus, *$\mathfrak{B}$-free integers in number fields and dynamics*, http://arxiv.org/abs/1507.00855.

[5] M. Brin, B. Hasselblatt, Y. Pesin, *Modern Dynamical Systems and Applications*, Cambridge University Press, USA, 2004.

[6] F. Cellarosi and Y. G. Sinai, *Ergodic properties of square-free numbers*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 15 (2013), pp. 1343–1374.

[7] E. Eberlein, *On topological entropy of semigroups of commuting transformations*, in International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics (Rennes, 1975), Soc. Math. France, Paris, 1976, pp. 17–62. Astérisque, No. 40.

[8] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory, 1 (1967), pp. 1–49.

[9] E. Glasner, *Ergodic theory via joinings*, vol. 101 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[10] E. Glasner, B. Weiss, *On the interplay between measurable and topological dynamics*, Handbook of Dynamical Systems, vol. 1B, Elservier North-Holand, 2006.

[11] C. Huck, M. Baake, *Dynamical properties of k-free lattice points*, arXiv: 1402.2202v, 2014.

[12] J. Laison, M. Schick, *Seeing Dots: Explorations on the Visibility of Lattice Points*, Mathematics Magazine 80 (2007), no. 4, 274–282.

[13] R. Peckner, *Uniqueness of the measure of maximal entropy for the squarefree flow*, http://arxiv.org/abs/1205.2905, pojawi się w Israel J. Math.

[14] P. A. B. Pleasants and C. Huck, *Entropy and diffraction of the k-free points in n-dimensional lattices*, Discrete Comput. Geom., 50 (2013), pp. 39–68.

[15] P. Sarnak, *Three lectures on Möbius function, randomness and dynamics*, publications.ias.edu/sarnak/.

[16] R. Shreevatsa, *Lattice points visible from the origin*, https://shreevatsa.wordpress.com/2008/11/07/lattice-points-visible-from-the-origin/.

[1] *Wydział Matematyki i Informatyki*
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń
E-mail: aurbart@mat.umk.pl

Przysłano: 15.05.2015; publikacja on-line: 30.09.2015.