Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 2 (2015), 11-28

Prace Koła Matematyków
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2015)

Barbara Ciesielska[1], *Agnieszka Kowalczyk*[2]

Twierdzenie Perrona–Frobeniusa i jego zastosowanie w algorytmie Page Rank

Streszczenie. Jednym z ciekawszych i znajdujących wiele zastosowań twierdzeń z algebry liniowej jest twierdzenie Perrona-Frobeniusa. Twierdzenie to jest wspólnym rezultatem prac Oskara Perrona z 1907 i Georga Frobeniusa z 1912. Dzięki niemu wiadomo, iż największa wartość własna rzeczywistej nieujemnej kwadratowej macierzy jest rzeczywista i ma krotność 1. Co więcej, wektor własny korespondujący z tą wartością własną jest ściśle dodatni. Twierdzenie to znajduje zastosowanie w teorii prawdopodobieństwa, ekonomii, demografii, rankingach, a także (dzięki idei Larry'ego Page'a i Sergey'a Brina z 1996 roku) w silnikach wyszukiwarek internetowych. Głównym celem naszego artykułu jest przedstawienie twierdzenia Perrona-Frobeniusa wraz z zarysem jednego z najpopularniejszych jego dowodów (korzystającego z twierdzenia Brouwera o punkcie stałym) oraz zaprezentowanie jego różnorakich i zaskakujących zastosowań, między innymi w algorytmie Page Rank używanym obecnie przez wyszukiwarkę Google.

Abstract. The Perron–Frobenius theorem, which was firstly proved by Oskar Perron in 1907 and later extended by Georg Frobenius in 1912, asserts that a real nonnegative square matrix has a unique largest real eigenvalue and that the eigenvector corresponding to it has strictly positive components and that this eigenvector is stochastic. This theorem has a wide variety of applications: from probability theory, through economics, demography and rankings to (according to Larry Page and Sergey Brin's idea in 1996) Internet search engines. The main aim is to present this theorem with one of its most popular proofs (using the Brouwer fixed point theorem) and to explain the idea of several of its applications.

AMS (2010) Subject Classification: 15A18, 15A42.
Słowa kluczowe: tw. Perrona–Frobeniusa, algorytm PageRank, model Lesliego, rankingi, Power Control Problem.

1. Wstęp

1.1. Wstęp historyczny

Twierdzenie Perrona–Frobeniusa jest twierdzeniem z zakresu algebry liniowej noszącym nazwiska dwóch niemieckich matematyków. Obaj zajmowali się głównie matematyką teoretyczną.

Oskar Perron urodził się 7 maja 1880 roku w Frankenthal i zmarł 22 lutego 1975 roku w Monachium. Był profesorem Uniwersytetu w Heidelbergu i Uniwersytetu Ludwika Maksymiliana w Monachium. Zajmował się głównie równaniami różniczkowymi zwyczajnymi i cząstkowymi, a także mechaniką nieba i teorią macierzy. To właśnie on w roku 1907 opublikował i udowodnił pierwotną wersję twierdzenia w czasopiśmie „Mathematische Annalen", w artykule noszącym tytuł „Zur Theorie der Matrices" (niem. „O teorii macierzy").

Z kolei Ferdinand Georg Frobenius urodził się 26 października 1849 roku w Charlottenburgu (obecnie dzielnica Berlina) i zmarł 3 sierpnia 1917 tamże. Był związany głównie z Uniwersytetem Humboldta w Berlinie i Politechniką Federalną w Zurychu. Do jego głównych matematycznych zainteresowań należały: teoria grup, teoria algebr, teoria liczb i równania różniczkowe. Zainteresował się również twierdzeniem udowodnionym przez Perrona i na przestrzeni lat 1908–1912 opublikował trzy prace z nim związanie. Ostatnia, pochodząca z roku 1912, nosi tytuł „Über Matrizen aus nicht negativen Elementen" (niem. „O macierzach posiadających nieujemne wyrazy") i zawiera ostateczną, obecną wersję twierdzenia Perrona– Frobeniusa.

Zarówno Perron, jak i Frobenius zajmowali się czystą matematyką i nie interesowali się zbytnio jej zastosowaniami. Frobenius uważał wręcz, iż zastosowania matematyki powinny skupiać zainteresowanie technicznych uczelni. Żaden z nich nie przewidział, jak szeroki zakres zastosowań będzie mieć ich twierdzenie. W XX wieku twierdzenie to zostało wykorzystane w modelowaniu ekonomicznym (m. in. w: równaniu wymiany, modelu Leontiefa czy też liniowym modelu produkcji), w modelowaniu biologicznym, a także — używanym praktycznie przez każdego internautę — algorytmie Page Rank.

1.2. Wstęp teoretyczny

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym)
Jeżeli X jest niepustym, domkniętym, ograniczonym i wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, a $F\colon X \to X$ odwzorowaniem ciągłym, to istnieje takie $x \in X$, że $F(x) = x$.

Definicja 2 (Wartość własna, wektor własny)
Wektorem własnym kwadratowej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazywamy taki niezerowy wektor v, dla którego zachodzi $Av = \lambda v$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$.
Skalar λ nazywamy wartością własną macierzy A odpowiadającą wektorowi własnemu v.

Definicja 3 (Widmo, promień spektralny macierzy)
Widmem macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazywamy zbiór

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Promieniem spektralnym macierzy A nazywamy liczbę

$$\max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Definicja 4 (Macierz redukowalna)
Kwadratową macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazywamy redukowalną, jeżeli za pomocą permutacji odpowiednich wierszy i kolumn możemy ją sprowadzić do postaci górnej trójkątnej. To znaczy, że macierz jest redukowalna, jeżeli istnieje taka macierz permutacji P, że zachodzi:

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

gdzie B i D to macierze kwadratowe, a 0 to macierz zerowa.

Definicja 5 (Macierz nieredukowalna)
Macierz A nazywamy nieredukowalną, jeżeli nie jest redukowalna.

Dysponujemy również równoważną definicją:
Mówimy, że macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest nieredukowalna, gdy dla każdej pary $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ istnieje takie całkowite $m > 0$, że $(A^m)_{ij} > 0$, gdzie (A^m) to m–ta potęga macierzy A.

Przykład 6
Macierz

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

jest redukowalna. Natomiast macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

jest nieredukowalna.

Definicja 7 (Macierz prymitywna)
Macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o wyrazach nieujemnych nazywamy prymitywną, jeżeli istnieje taka liczba naturalna b, że zachodzi $(A^b)_{ij} > 0$.

Uwaga 8
Macierz prymitywna jest nieredukowalna.

Definicja 9 (Wektor prawdopodobieństwa/stochastyczny)
Wektorem prawdopodobieństwa nazywamy taki wektor $v \in \mathbb{R}^n$, którego wszystkie współrzędne są nieujemne i sumują się do jedności.

Przykład 10
Wektorami prawdopodobieństwa są wektory $x = (1,0,0,0), y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$, ale nie są nimi $z = (1,2,0,0), w = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Definicja 11 (Macierz Markowa/stochastyczna/probabilistyczna)
Kwadratową macierz $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazywamy prawą (lewą) macierzą Markowa, jeżeli wszystkie jej elementy to nieujemne liczby rzeczywiste, a elementy w każdym jej wierszu (kolumnie) sumują się do jedności.[1]

Przykład 12
Macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

jest prawą macierzą Markowa.

Definicja 13 (Łańcuch Markowa)
Łańcuchem Markowa nazywamy taki ciąg wektorów prawdopodobieństwa x_0, x_1, $x_2, \ldots$, że zachodzi $x_{k+1} = Mx_k$ dla pewnej lewej macierzy Markowa M.

Uwaga 14
Łańcuchem Markowa jest więc ciąg zdarzeń, w którym prawdopodobieństwo każdego zdarzenia zależy jedynie od stanu poprzedniego. Łańcuch Markowa to dyskretny proces Markowa, czyli proces stochastyczny[2], który spełnia tzw. własność Markowa:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n),$$

gdzie $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ to ciąg zmiennych losowych.

Twierdzenie 15
Jeżeli M jest macierzą Markowa, to istnieje taki niezerowy wektor v, dla którego zachodzi $Mv = v$. To oznacza, że każda taka macierz posiada wartością własną równą 1.

Definicja 16
Powyższy wektor v nazywamy wektorem stacjonarnym.

Przykład 17
W Krakowie kibice piłki nożnej[3] solidaryzują się z Cracovią bądź z Wisłą Kraków (dla uproszczenia pomijamy pozostałe drużyny piłkarskie). Niech $x_0 = (0,4; 0,6)$ (tzn. że 40% kibiców solidaryzuje się z Cracovią, a 60% z drużyną z drugiej strony Błoń). Każdego roku 10% kibiców Wisły zmienia zdanie i zaczyna kibicować Cracovii, pozostali pozostają wierni swojej drużynie. Analogicznie, każdego roku 5% kibiców opuszcza Cracovię i wybiera Wisłę, a pozostali zostają. Oznaczmy $x_k = (c_k; w_k)$ jako wektor przedstawiający preferencje kibiców w k–tym roku. Zapiszmy ten problem w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} c_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \\ w_k \end{bmatrix}$$

[1] To oznacza, że wiersze (kolumny) są wektorami prawdopodobieństwa.
[2] Procesem stochastycznym nazywamy rodziną zmiennych losowych indeksowaną parametrem t interpretowanym jako czas
[3] Ten przykład jest uproszczeniem sytuacji panującej w Mieście Królów Polskich i nie ma na celu nikogo urazić.

Zachodzą następujące równości:

$$c_{k+1} = 0,95c_k + 0,1w_k,$$

$$w_{k+1} = 0,9w_k + 0,05c_k.$$

Przykładowo wyliczmy: $x_1 = (0,44; 0,56)$, $x_2 = (0,474; 0,526)$. Natomiast dla dużych k wektor x_k zmierza do $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ – jest to wektor stacjonarny.

Definicja 18 (Macierz sąsiedztwa)
Kwadratową macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazywamy macierzą sąsiedztwa, gdy $a_{ij} = 0$ lub $a_{ij} = 1$. Macierz ta opisuje graf o n wierzchołkach.

Definicja 19 (Graf stowarzyszony z macierzą sąsiedztwa)
Graf $\mathcal{G}(A)$ dla danej macierzy sąsiedztwa $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest definiowany jako graf z n wierzchołkami $(N_1, ..., N_n)$, dla którego istnieje krawędź skierowana z N_j do N_i wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{ij} \neq 0$.

Przykład 20
Dla macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mamy następujący graf:

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r] \arrow[dr] & N_2 \\ N_3 \arrow[r] \arrow[ur] & N_4 \end{tikzcd}$$

Definicja 21 (Graf silnie spójny)
Graf jest silnie spójny, jeżeli między każdą parą wierzchołków istnieje ścieżka (niekoniecznie krawędź skierowana).

Przykład 22
Graf

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[d] \\ C \arrow[u] & D \arrow[l] \end{tikzcd}$$

jest silnie spójny. Graf z przykładu 20 nie jest silnie spójny.

Uwaga 23
Macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest nieredukowalna wtedy i tylko wtedy, gdy graf $\mathcal{G}(A)$ jest silnie spójny.

2. Twierdzenie Perrona–Frobeniusa

Twierdzenie 24 (Twierdzenie Perrona–Frobeniusa)
Jeżeli wszystkie wyrazy nieredukowalnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ są nieujemne, to istnieje dokładnie jedna taka rzeczywista dodatnia wartość własna tej macierzy $\lambda > 0$ (o krotności algebraicznej 1), że dla wszystkich innych wartości własnych μ tej macierzy zachodzi $|\mu| < \lambda$. Ponadto istnieje taki wektor własny stowarzyszony z λ, że wszystkie jego współczynniki są dodatnie.

Dowód. Rozważmy zbiór

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$$

oraz standardowy sympleks:

$$\mathcal{S} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\} \subset \mathcal{C}.$$

Na sympleksie $\mathcal{S}$ definiujemy następujące odwzorowanie: $T(x) = \frac{Ax}{(Ax)\cdot(1,1,\ldots,1)}$. Zwróćmy uwagę, że wyrażenie $(Ax) \cdot (1, 1, \ldots, 1)$ jest różne od zera na $\mathcal{S}$, bo macierz A jest nieredukowalna i o nieujemnych wyrazach (żadna jej kolumna nie jest zerowa). Widzimy zatem, że odwzorowanie T jest poprawnie określone i ciągłe jako iloraz odwzorowań ciągłych. Łatwo również zauważyć, że $T(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$, ponieważ:

- wszystkie współczynniki macierzy A i wektora należącego do sympleksu x są nieujemne, a co za tym idzie – także wektora Ax, zatem również wyrażenia $\frac{Ax}{(Ax)\cdot(1,1,\ldots,1)}$,
- suma współrzędnych wektora $T(x)$ jest równa 1, ponieważ odwzorowanie możemy zapisać następująco: $T(x) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} A_{i,1}x_i}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_i}, \ldots, \frac{\sum_{i=1}^{n} A_{i,n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_i}\right)$, a wtedy łatwo widać, że $\sum_{j=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}x_i}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_i} = 1$.

$\mathcal{S}$ jest zbiorem niepustym, domkniętym, ograniczonym i wypukłym, a T jest odwzorowaniem ciągłym. Spełnione są więc założenia twierdzenia Brouwera o punkcie stałym. Istnieje zatem taki punkt x, że $T(x) = x$, czyli $\frac{Ax}{(Ax)\cdot(1,1,\ldots,1)} = x$, a więc:

$$Ax = ((Ax) \cdot (1, 1, \ldots, 1))x.$$

Pokażemy, że każdy punkt stały tego odwzorowania leży wewnątrz sympleksu – czyli wszystkie jego współrzędne są dodatnie. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że tak nie jest i x należy do pewnej ściany $(n-2)$–wymiarowej S_j leżącej naprzeciw wierzchołka e_j. Przede wszystkim zauważmy, że punkt stały odwzorowania T jest też punktem stałym każdego odwzorowania T^N. Ale wiemy, że macierz

A jest nieredukowalna, więc istnieje takie N, że $A_{i,j}^N \neq 0$, zatem zachodzi również $T^N(S_j) \not\subset S_j$. To pokazuje, że punkt stały nie może leżeć w wnętrzu tegoż sympleksu. Analogicznie traktujemy $(n-k)$–wymiarowe krawędzie dla $k \in \{3, \ldots, n-1\}$, a także w końcu wierzchołki: e_i nie może być punktem stałym, gdyż istnieją N i j takie, że $A_{i,j}^N \neq 0$. Stąd otrzymujemy sprzeczność: jeżeli $T(x) = x$, to $x \notin \partial\mathcal{S}$. Wiemy więc z tego, że wszystkie współrzędne wszystkich punktów stałych naszego odwzorowania są dodatnie.

Największą dodatnią wartością własną, której stowarzyszonym wektorem własnym jest x, otrzymujemy następująco:

$$\lambda_{max} = \max\{(Ax) \cdot (1, 1, \ldots, 1),\ x = T(x)\}.$$

Określmy teraz odwzorowanie $L\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ poniższym wzorem:

$$L(z) = \max\{s \in \mathbb{R}_+ : sz \leq Az\},$$

gdzie przez relację $\leq$ rozumiemy porównywanie współrzędnych. Określmy ponadto macierz $P := (I + A)^q$, gdzie $q \in \mathbb{N}$ jest dobrane tak, że P jest macierzą dodatnią. Z określenia L wiemy, że $L(rz) = L(z)$ dla każdego niezerowego r. Jeżeli $z < y$ (porównujemy współrzędne wektorów), to $Pz < Py$ oraz $PA = AP$. Czyli dla $sz \leq Az$ zachodzi $sPz \leq PAz = APz$, a to implikuje $L(z) \leq L(Pz)$. Wiemy również, że obraz $\mathcal{S}$ przez P jest zwarty (jako obraz zwartego zbioru przez odwzorowanie ciągłe) i wszystkie elementy P są dodatnie. Funkcja L jest ciągła na $P(\mathcal{S})$, czyli osiąga maksimum na $P(\mathcal{S})$ – powiedzmy L_{max}. Ponieważ zachodzi $L(z) \leq L(Pz)$ i wiemy, że $L(z) < L(Pz)$ (chyba że z jest wektorem własnym A), wnioskujemy, że L_{max} jest osiągalne w wektorze własnym x, a L_{max} to wartość własna.

Weźmy teraz wektor własny w macierzy A i stowarzyszoną z nim wartość własną μ. Jako $|w_j|$ oznaczamy j–tą współrzędną wektora w. Przeprowadzamy następujące proste oszacowanie:

$$|\mu||w|_i = |\mu w_i| = \left|\sum_j A_{ij} w_j\right| \leq \sum_j |A_{ij}||w_j| = \sum_j A_{ij}|w_j| = (A|w|)_i.$$

Pokrótce możemy zapisać, że $|\mu||w| \leq A|w|$, czyli – wracając do określenia L – otrzymujemy, iż $\mu \leq L(|y|) \leq L_{max}$. Ponieważ zachodzi $L_{max} = \lambda_{max}$, to otrzymujemy $|\mu| \leq \lambda_{max}$.

Teraz udowodnimy, że λ_{max} ma krotnością algebraiczną 1. Zauważmy najpierw, że jeżeli pochodna wielomianu charakterystycznego macierzy A (w punkcie λ_{max}) jest różna od zera, to oczywiście λ_{max} nie jest pierwiastkiem dwukrotnym tego wielomianu, czyli ma krotnością algebraiczną również 1. Rozważmy więc A (naszą kwadratową macierz z założenia) i C – diagonalną macierz takich samych wymiarów, co A, z wartościami $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na diagonali. Korzystając z metody Laplace'a liczenia wyznacznika macierzy łatwo zobaczyć, że $\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\det(C - A) = \det(C_i - A_i)$, gdzie A_i oznacza macierz utworzoną przez wykreślenie i–tej kolumny i i–tego wiersza, tak samo C_i. Kładąc $\lambda_i = \lambda$ i korzystaąc z reguły Leibniza mamy, że

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\det(\lambda I - A) = \sum_i \det(\lambda I_i - A_i).$$

Ponieważ każda z macierzy $\lambda_{max} I_i - A_i$ ma dodatni wyznacznik, to pochodna wielomianu charakterystycznego macierzy A po λ_{max} (w punkcie λ_{max}) jest większa od zera, czyli λ_{max} ma krotność algebraiczną 1.

Na koniec zauważmy jeszcze, że mając $|\mu| \leq \lambda$ i krotność algebraiczną 1 wartości własnej λ (czyli $\mu \neq \lambda$) otrzymujemy $|\mu| < \lambda$, co już kończy dowód.

Uwaga 25
Od tego momentu λ oznaczać będzie największą rzeczywistą wartość własną dla aktualnie rozważanej macierzy.

Uwaga 26
Jeżeli macierz A spełnia założenia twierdzenia Perrona–Frobeniusa, to istnieje dokładnie jeden stochastyczny wektor własny $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tej macierzy stowarzyszony z wartością własną λ.

Uwaga 27
Zauważmy, że jeśli macierz A spełnia założenia twierdzenia Perrona–Frobeniusa i jeśli dodatkowo A jest macierzą Markowa, to wektor x z tezy twierdzenia jest wektorem stacjonarnym procesu Markowa. Dzięki temu twierdzeniu otrzymujemy dodatkowo jego jedyność.

Wniosek 28
Jeśli macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest stochastyczna i nieredukowalna, to promień spektralny tej macierzy wynosi 1 i istnieje dokładnie jeden dodatni stochastyczny wektor własny $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Ponadto, $x = \frac{1}{n} \lim_{k\to\infty} A^k e$, gdzie $e = (1, \ldots, 1)$.

3. Zastosowania

3.1. Rankingi

Metod i podstaw do tworzenia rankingów są krocie, tak samo jak wyników tych rankingów utworzonych z różnych metod. Są przydatne nie tylko w różnego rodzaju zawodach, lecz także w dyskusjach i sytuacjach, gdy ciężko o bezpośrednie porównanie. Na przykład: gracz A wygrał z graczem B i C, gracze B i C zremisowali, w związku z czym gracze B i C mają tyle samo punktów, ale któryż z nich lepiej się zaprezentował. Z kolei jeśli gracz A wygrywa z B, gracz B z C, C wygrywa z A, to nie ma da się ustalić porządku. Zachodzą również sytuacje, gdy gracze rozegrali nierówne ilości walk, co powoduje trudności w ustaleniu pozycji rankingowej i sposobie oceny.

Jednakże, niezależnie od metody i celu sporządzania rankingu, najpierw musimy mieć elementy, które chcemy uporządkować. My posłużymy się pięcioma dowcipami matematycznymi, z użyciem których zostało przeprowadzone pewne badanie statystyczne. Oto one:

1. Idzie Jezus przez pustynię z Apostołami i naucza:
   –Życie jest jak $y = x^2 + 6x - 9$.
   –Ej, ale o co mu chodzi? – pyta Tomasz Jana.

–Nie wiem, to chyba jakaś parabola.

2. Do baru *The Legends* wchodzi nieskończenie wiele matematyków.
   Pierwszy zamawia piwo.
   Drugi zamawia pół piwa.
   Trzeci zamawia ćwierć piwa.
   Barmanka kładzie na barze 2 piwa i mówi:
   –Panowie, znajcie swoje granice!

3. Olimpiada odbywała się na kwadratowym stadionie. Niestety poprzedniemu złotemu medaliście w biegu na 400 m zawody nie poszły i zajął dopiero 7 miejsce.
   –Co się stało? – pyta dziennikarz.
   –Nie jestem w formie kwadratowej.

4. Trzech ludzi leciało balonem nad pustynią, ale stracili orientację i postanowili dowiedzieć się, gdzie się znajdują. Obniżyli lot i widząc na dole człowieka zapytali:
   – Czy może nam pan powiedzieć, gdzie jesteśmy?
   – W balonie – odpowiedział człowiek na ziemi.
   – Pan zapewne jest matematykiem.
   – A z czego panowie wnioskują?
   – Podał pan odpowiedź prawdziwą, precyzyjną i zupełnie bezużyteczną.
   – A panowie zapewne są inżynierami.
   – A skąd taki wniosek?
   – Po pierwsze: nie macie pojęcia, gdzie jesteście i jak się tam znaleźliście; po drugie: prosicie o pomoc matematyka, a po uzyskaniu odpowiedzi dalej nic nie wiecie i winicie za to matematyka.

5. –Jaki jest obraz piwa?
   –Imbir.

Badanie statystyczne dotyczące powyższych dowcipów zostało przeprowadzone na pięciu osobach, dysponujących wystarczającą wiedzę matematyczną, by zrozumieć powyższe żarty. Każdy miał do wykonania 2 zadania. Pierwsze polegało na ocenie 4 „pojedynków dowcipów", tzn. zdecydowaniu, który z dwóch dowcipów jest lepszy (co pytana osoba rozumie pod tym pojęciem, jest kwestią indywidualną). Pojedynki były wyznaczone dla każdej osoby w sposób losowy, ale tak, aby każde dwa dowcipy rozegrały dwie walki. Ostatecznie każdy dowcip walczył 4 razy, więc zostało przeprowadzone w sumie 20 pojedynków. Drugie zadanie polegało na uszeregowaniu dowcipów od najlepszego do najgorszego, przy czym najlepszy dostawał 5 punktów, drugi z kolei – 4, trzeci – 3, czwarty – 2, a ostatni tylko 1. Wyniki zostały zebrane w poniższych tabelach.

Wyniki pojedynków z zadania 1 (wygrane i–tego gracza są wypisane w i–tym wierszu) to:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	Σ
1	X	0	0	0	1	*1*
2	2	X	0	0	1	*3*
3	2	1	X	0	1	*4*
4	2	2	2	X	1	*7*
5	1	1	1	1	X	*4*

Ranking według sumy uzyskanych punktów w zadaniu 1 wygląda tak:

i	v_i	Pozycja rankingowa 1
1	1	5
2	3	4
3	4	2
4	7	1
5	4	2

Z kolei wyniki drugiego zadania i ich ranking wygląda następująco:

i	v_i	Pozycja rankingowa 2
1	8	5
2	13	4
3	18	1
4	16	3
5	17	2

Na podstawie tabeli z zadania 1 tworzymy macierz A. I tu już pojawia się pierwsza trudność, ponieważ istnieje wiele możliwości określenia tej macierzy. Oto kilka popularnych sposobów używanych na określenie wyrazu a_{ij}:

- a_{ij} – ilość sytuacji, w których dowcip i pokonał dowcip j,
- $a_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_{ij}+S_{ji}}$, gdzie S_{ij} – punkty, które i zdobyło w pojedynku przeciwko j,
- $a_{ij} = \frac{S_{ij}+1}{S_{ij}+S_{ji}+2}$, gdzie S_{ij} – punkty, które i zdobyło w pojedynku przeciwko j,
- $a_{ij} = h\left(\frac{S_{ij}}{S_{ij}+S_{ji}}\right)$, gdzie S_{ij} – punkty, które i zdobyło w pojedynku przeciwko j, $h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x - \frac{1}{2})\sqrt{|2x-1|}$.

My w dalszych rozważaniach będziemy korzystać z pierwszego sposobu. Ponieważ ta metoda rankingowa ma na celu skorzystanie z twierdzenia Perrona–Frobeniusa, musimy zadbać, żeby założenia były spełnione. W związku z tym dopisujemy jedynki na diagonali (nie zmieni to ogólności rankingu), aby macierz A była nieredukowalna. Otrzymujemy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Największa wartość własna λ macierzy A wynosi $\lambda \approx 4,02$, natomiast stochastyczny wektor własny v stowarzyszony z λ wynosi w przybliżeniu:

$$v \approx (0,17; 0,28; 0,37; 0,71; 0,51).$$

Wartości te pomogą nam w stworzeniu trzeciego rankingu: im wyższa wartość i–tej współrzędnej wektora własnego, tym wyżej i–ty dowcip będzie w naszym zestawieniu. Rankingi jeden i dwa będą wyznaczone za pomocą zadań 1 i 2 z badania statystycznego. W pierwszym rankingu dowcip otrzyma tyle punktów, ile wygrał pojedynków. Natomiast w drugi ranking polegał będzie na zsumowaniu punktów uzyskanych przez poszczególne dowcipy podczas 2 zadania wykonywanego podczas ankiety. Każda z tych metod wydaje się rozsądnym sposobem wyboru najlepszego dowcipu.

Wyniki uzyskane w zadaniu pierwszym przez pryzmat twierdzenia Perrona–Frobeniusa i trzeci ranking przedstawiają się jak niżej:

i	v_i	Pozycja rankingowa 3
1	0,17	5
2	0,28	4
3	0,37	3
4	0,71	1
5	0,51	2

Porównanie jest przedstawione w poniższej tabeli:

i	Pozycja rankingowa 1	Pozycja rankingowa 2	Pozycja rankingowa 3
1	5	5	5
2	4	4	4
3	2	1	3
4	1	3	1
5	2	2	2

Jak widać, różnice w uzyskanej pozycji nie są znaczne, dotyczą tylko pierwszych trzech miejsc, a różnice wskaźników v_i są w paru przypadkach niewielkie. Warto jednak zauważyć, że próbka statystyczna była mała – wynosiła tylko 10 osób. Widzimy jak łatwo manipulować ostatecznymi wynikami rankingu – wystarczy posłużyć się innym systemem liczenia.

Warto wspomnieć jeszcze o jednej modyfikacji macierzy pojedynków A. Rozważmy macierz $R = \alpha A + (1-\alpha)E$ dla $\alpha \in (0,1)$ oraz:

$$E = \begin{bmatrix} v_1 & v_1 & v_1 & v_1 & v_1 \\ v_2 & v_2 & v_2 & v_2 & v_2 \\ v_3 & v_3 & v_3 & v_3 & v_3 \\ v_4 & v_4 & v_4 & v_4 & v_4 \\ v_5 & v_5 & v_5 & v_5 & v_5 \end{bmatrix},$$

gdzie $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 1$. Liczba v_i ma opisywać „jakość i–tego dowcipu. Wystarczy rzucić okiem na tą modyfikację, aby zobaczyć, jak bardzo – w zależności od dobrania wag v_i i definicji „jakości" – różniłyby się wyniki rankingu...

3.2. Power Control Problems

Następnym zastosowaniem tytułowego twierdzenia są tzw. problemy kontroli siły. Aby lepiej zobrazować to zagadnienie, wyobraźmy sobie, że jesteśmy w kawiarni ze znajomymi. Chcemy rozmawiać na komfortowym poziomie głośności. Jednakże hałas dochodzący z naszego stolika powoduje, że ludzie przy innych stolikach prowadzą swoje rozmowy głośniej, aby lepiej siebie rozumieć. To z kolei powoduje, że poziom głośności przy naszym stoliku wzrasta – i tak dalej... (oczywiście pomijamy hałasy postronne). Chcemy zatem znaleźć takie optymalne dodatnie poziomy głośności P_i dla każdego stolika, aby wszystkie osoby w kawiarni mogły się bez problemu porozumiewać w obrębie stolika, przy którym siedzą.

Matematycznie rzecz ujmując – chcemy, aby zachodziły poniższe nierówności:

$$\frac{P_i}{\sum\limits_{i \neq j} G_{i,j} P_j} \geq \gamma_i, \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

gdzie danymi są:

- liczba stolików ($m > 0$),
- akceptowalny stosunek głośności rozmów stolika i do hałasu z innych stolików, który dochodzi do stolika i ($\gamma_i > 0$),
- dodatni wskaźnik $G_{i,j}$ osłabienia dźwięku dochodzącego ze stolika j do stolika i (np. wartość wskaźnika $G_{i,j}$ wynosząca $\frac{1}{3}$ oznacza, że przy poziomie głośności a stolika j, stolik i będzie słyszał rozmowy stolika j na poziomie głośności $\frac{2}{3}a$).

Chcemy, aby stosunek głośności był większy bądź równy akceptowalnemu stosunkowi głośności. Jeżeli ów stosunek jest mniejszy niż wartość γ_i, oznacza to, że ludzie siedzący przy stoliku i nie mogą siebie usłyszeć pośród wszystkich odgłosów w kawiarni.

Po przemnożeniu przez wartość mianownika, dostajemy:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & 0 & \ldots & G_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}}_{P} \leq \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}$$

Relacją $\leq$ rozumiemy jako porównywanie odpowiednich współrzędnych wektorów. Oznaczmy przez A wymnożone przez siebie dwie pierwsze macierze. Macierz ta jest prymitywna (wystarczy $k = 2$), a więc redukowalna. Wszystkie jej elementy są nieujemne. W tym właśnie momencie przychodzi nam z pomocą twierdzenie Perrona–Frobeniusa. Mówi nam ono, że istnieją taki wektor P_λ o wyrazach dodatnich i taki dodatni skalar λ, że $AP_\lambda = \lambda P_\lambda$. Zauważmy, że nierówność $AP \leq P$ zajdzie dla $P = P_\lambda$ wtedy i tylko wtedy, gdy λ będzie mniejsze bądź równe jedności.

Musimy jeszcze tylko znaleźć akceptowalne ograniczenie dla γ_i – uzyskamy je przy pomocy twierdzenia Siemiona Gerszgorina.

Twierdzenie 29 (Twierdzenie Gerszgorina)
Niech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą o wyrazach a_{ij}. Niech $R_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ dla $i = 1, \dots, n$. Innymi słowy, R_i to suma modułów wyrazów danego wiersza, które nie leżą na diagonali. Wtedy każda wartość własna λ_i macierzy A zawiera się w sumie każda $D(a_{ii}, R_i) \subset \mathbb{C}$ o środkach w a_{ii} i o promieniach R_i. Tzn. zachodzi: $|\lambda_i - a_{ii}| \leq R_i$.

Aby lepiej zobrazować powyższe twierdzenie pomocnicze, weźmy na przykład wartości własne macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, którymi są -1 i 5. Leżą one w końcach $D(3, 2)$ oraz $D(1, 4)$.

Stosując to twierdzenie do rozwiązania naszego problemu, dla $i = 1, \dots, m$ otrzymujemy:

$$|\lambda_i - a_{ii}| = |\lambda_i| \leq \sum_{i\neq j} R_i = \sum_{i\neq j} |a_{ij}| = \gamma_i \sum_{i\neq j} G_{i,j}.$$

Chcemy, by dla każdego i zachodziło $|\lambda_i| \leq 1$. Naturalne jest więc, aby ustalić akceptowalne ograniczenie dla γ_i jako: $\gamma_i \leq \frac{1}{\sum_{i\neq j} G_{i,j}}$.

Podsumowując: jeśli promień spektralny macierzy A będzie mniejszy od jedności, wtedy wektor własny P_λ równania $AP_\lambda = \lambda P_\lambda$ spełni nierówność $AP_\lambda \leq P_\lambda$ jako wektor optymalnych poziomów głośności dla każdego stolika. Dodatkowo, rozwiązanie to jest właściwe tak długo, jak γ_i nie przewyższy poziomu $\frac{1}{\sum_{i\neq j} G_{i,j}}$. Jeżeli poziom ten zostanie przekroczony, wówczas nie możemy być pewni, czy nasze rozwiązanie się sprawdzi. Warto wtedy pomyśleć o zmianie konfiguracji stolików.

3.3. Modelowanie populacji – model Lesliego

Modele populacji roślin, zwierząt czy też ludzi są typowymi przykładami nieujemnych systemów dynamicznych, w których zmienne położenia reprezentują biomasę, gęstość lub liczebność populacji. Wiele modeli, szczególnie te opisujące drapieżnictwo, konkurencję i symbiozę pomiędzy gatunkami, ma postać nieliniową – w takich przypadkach potrzebne są specyficzne narzędzia. Wartym uwagi wyjątkiem jest model Lesliego opisujący ewolucję populacji w czasie, w którym wskaźniki płodności i przeżycia poszczególnych jednostek są ściśle zależne od ich wieku.
W modelu Lesliego czas jest dyskretny, wyznaczając sezon reprodukcji (najczęściej rok w przypadku ssaków). Zmienne $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ będą tu opisywać liczbą samic (mogą to być też jednostki lub pary) w wieku $1, 2, \dots, n$ na początku roku t.

W najprostszym możliwym przypadku proces starzenia można opisać poniższym równaniem:

$$x_{i+1}(t+1) = s_i x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

gdzie $s_i > 0$ to współczynnik przeżycia w wieku i (ta część samic w wieku i, która przeżyje przynajmniej rok). Pierwsze równanie stanu bierze pod uwagę proces reprodukcji:

$$x_1(t+1) = s_0(f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \ldots + f_n x_n(t)),$$

gdzie $s_0 > 0$ to współczynnik przeżycia podczas pierwszego roku życia, $f_i \geq 0$ to wskaźnik płodności samic w wieku i (średnia liczba samic urodzona z każdej samicy w wieku i). Te równania, zaproponowane przez Lesliego, prowadzą do nieujemnego liniowego modelu autonomicznego:

$$x(t+1) = Ax(t),$$

gdzie macierz A (nazywana macierzą Lesliego) przedstawia się następująco:

$$\begin{bmatrix} s_0 f_1 & s_0 f_2 & \ldots & s_0 f_{n-1} & s_0 f_n \\ s_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Mimo że model Lesliego wydaje się być bardzo prosty, jest często używany do przeprowadzania prognozowania demograficznego:

$$x(k) = A^k x(0)$$

przy znanym stanie początkowym $x(0)$.

Skomentujmy jeszcze użyteczność powyższego modelu. W modelach Lesliego wskaźniki płodności i przeżycia zależą tylko od wieku. W rzeczywistości jest to prawdą pod warunkiem, że każda klasa wiekowa nie jest zbyt liczna. Faktycznie, jeśli tylko liczebność danej klasy rośnie, pojawiają się sytuacje, w których wskaźniki płodności lub przeżycia ulegają redukcji (na przykład, utrudnione jest znalezienie pożywienia lub przestrzeni do reprodukcji, z drugiej strony łatwiej o rozprzestrzenianie się epidemii, itd.). To oznacza, że modele Lesliego dobrze nadaję się do opisu dynamiki populacji skazanych na wymarcie – tj. charakteryzujących się małymi wartościami $x_i(t)$ – możemy dla nich przyjąć, że ich wskaźniki płodności/przeżycia są stałe w czasie. Modele Lesliego są również bardzo skuteczne w krótkoterminowym prognozowaniu rosnących populacji. Wzbogacenie wiedzy na temat dynamiki populacji zwierząt jest ważne z uwagi na sformułowanie odpowiednich regulacji, np. dotyczących polowań.

Badając własności macierzy Lesliego możemy zauważyć, że jest ona nieujemna i jeśli $f_n > 0$, to jest również nieredukowalna. Można więc zastosować do niej twierdzenie Perrona–Frobeniusa. Znormalizowany wektor własny dla macierzy Lesliego (stowarzyszony z λ) jest nazywany stabilną strukturę wiekową – jest to z grubsza asymptotyczna dystrybucja wieku w czasie. Jego współrzędne odpowiadają udziałom poszczególnych klas wiekowych w całej populacji. Natomiast λ możemy interpretować jako asymptotyczną stopę wzrostu populacji – stopę wzrostu w stanie stabilnej struktury wiekowej. Da nam to informację o tym, czy dana populacja będzie rosła bez ograniczenia ($\lambda > 1$), ulegnie wymarciu ($\lambda < 1$) czy będzie dążyć do stanu równowagi ($\lambda = 1$).

Rozważmy macierz Lesliego zdefiniowaną powyżej z $f_n > 0$ i oznaczmy wektor własny odpowiadający λ jako $x_\lambda \geq 0$. Wtedy zachodzi

$$A^k - \lambda^k P_1 \to 0,$$

gdy $k \to \infty$, gdzie P_1 jest projekcją na jednowymiarową podprzestrzeń rozpiętą przez x_λ.

Zauważmy, że w wielu modelach lepiej jest dzielić populację nie na równe klasy wiekowe, ale na tzw. grupy stanów (ang. *stage groups*). Taki typ modelowania jest często używany w przypadku gatunków długowiecznych, ponieważ dane dla konkretnych grup wiekowych nie są dostępne, a jednostkowe klasy wiekowe dla gatunków żyjących (jak czarne niedźwiedzie) np. do 30 lat, skutkowałyby macierzami 30×30. Jako przykład [4] rozważmy dziką populację czarnych niedźwiedzi w stanie Virginia w latach 1994-1999. Analiza statystyczna prowadzi do następujących danych zebranych w poniższej tabeli.

Klasa wiekowa [lata]	średni wskaźnik reprodukcji	średni wskaźnik przeżycia
0–1	0	0,8
1–2	0	0,75
2–3	0	0,71
3–4	0,28	0,84
4 i wiďż˝cej	0,58	0,84

Macierz Lesliego dla powyższych danych (okazała się skuteczna w analizie przeprowadzonej przez biologów) przedstawia się następująco (przyjmujemy, że $s_0 = 1$):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,28 & 0,58 \\ 0,80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,84 & 0,84 \end{bmatrix}.$$

Zwróćmy uwagę, że powyższa macierz różni się od klasycznej postaci macierzy Lesliego – wyraz $a_{5,5}$ jest niezerowy i przyjmuje wartość wskaźnika s_n przeżywalności ostatniej (dorosłej) grupy. Wynika to właśnie z podziału populacji na grupy stanów.

Dla rozważanego przypadku λ wynosi około 1,04. Znormalizowany wektor własny stowarzyszony z λ ma postać $x \approx (0,23; 0,18; 0,13; 0,09; 0,37)$. Populacja będzie zatem rosnąć i dążyć do rozkładu zadanego przez poszczególne wyrazy wektora x.

[4] Za: [7].

3.4. Page Rank

Algorytm Page Rank, opatentowany przez dwóch doktorantów Uniwersytetu Stanforda w 1998, Larry'ego Page'a oraz Sergey'a Brina, ma na celu określenie „wartości" stron internetowych i sporządzenie ich rankingu. Podstawowa wersja algorytmu sprowadza się do skorzystania z twierdzenia Perrona–Frobeniusa w analogiczny sposób, jak w przypadku naszego rankingu dowcipów. Tym razem w macierzy A jako „wygraną" będziemy określać istnienie odnośnika z jednej strony do drugiej.

Definicja 30 (Macierz Google'a)
Macierzą Google'a nazywamy macierz $G = dS + (1 - d)E$, gdzie: $0 < d < 1$ to współczynnik tłumienia/znudzenia (ang. *damping factor*), S to lewa macierz Markowa, otrzymana z macierzy sąsiedztwa danego grafu przez przeskalowanie, $E = (e_{ij})$, gdzie $e_{ij} = \frac{1}{n}$ dla każdego i, j.

Uwaga 31 (O współczynniku tłumienia/znudzenia)
Według Brina i Page'a, „o algorytmie PageRank można myśleć jak o modelu zachowań użytkownika Internetu. Zakładamy, że istnieje losowy użytkownik, który klika na linki, nigdy się nie cofając. Jednak w pewnym momencie nudzi się tym zachowaniem i zaczyna od innej, losowej strony. Prawdopodobieństwo, że ten przypadkowy użytkownik odwiedzi jakąś stronę to jej PageRank. Współczynnik tłumienia, to prawdopodobieństwo, że ten użytkownik znudzi się i zażąda innej, losowej strony. Jedna z ważnych zmian to dodanie współczynnika d do pojedynczej strony bądź do grupy stron. To pozwala na personalizację obliczeń i czyni wręcz niemożliwym, by system zostać celowo zmylony, w celu uzyskania wyższej pozycji w rankingu. Oczywiście, istnieje wiele innych rozszerzeń algorytmu PageRank". [5]

Uwaga 32 (O współczynniku tłumienia/znudzenia)
Według Brina i Page'a, „do obliczeń przyjmuje się zazwyczaj współczynnik d równy 0,85".

Uwaga 33
Page i Brin potraktowali model zachować użytkownika Internetu jako proces stochastyczny, na podstawie którego zdefiniowali macierz Google'a będącą macierzą Markowa. W związku z tym stacjonarny wektor własny stowarzyszony z maksymalną wartością własną, na podstawie twierdzenia Perrona–Frobeniusa, jest jedyny. Możemy zatem utożsamiać go z pozycję rankingową.

Definicja 34 (Równanie PageRank)
Równaniem PageRank nazywamy równanie:

$$Gv = v,$$

gdzie v to wektor własny macierzy G.
W rozwiniętej formie równanie PageRank przedstawia się następująco:

$$[dS + (1 - d)E]v = v.$$

[5] Za: [10].

Przykład 35
Rozważmy 3 strony internetowe – A, B i W, gdzie A jest połączone z B i W (do strony A możemy dojść ze strony B lub ze strony W), B z W, a W z A. Znajdźmy ranking PageRank, jeśli $d = 0,9$.
Graf dla tej sytuacji został przedstawiony poniżej.

$$\begin{tikzcd}
A & B \arrow[l] \\
& W \arrow[u] \arrow[ul, <->]
\end{tikzcd}$$

Łatwo zauważyć", iż macierz sąsiedztwa tego grafu to:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a z kolei otrzymana z niej macierz stochastyczna wygląda następująco:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wówczas macierz Google'a przedstawia się jak poniżej:

$$G = d \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1-d}{3} & \frac{1-d}{3} & \frac{1-d}{3} \\ \frac{1-d}{3} & \frac{1-d}{3} & \frac{1-d}{3} \\ \frac{1-d}{3} & \frac{1-d}{3} & \frac{1-d}{3} \end{bmatrix}.$$

Podstawiając d, uzyskujemy

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{14}{15} & \frac{29}{60} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{29}{60} \\ \frac{14}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}.$$

I obliczamy, zgodnie z równaniem PageRank, wektor własny v macierzy G związany z największą wartością własną tej macierzy: $\lambda = 1$. Wektor ten wynosi $v \approx (0,4; 0,21; 0,39)$, co znaczy, że największą wartość PageRank ma strona A. Wynik można ten interpretować w następujący sposób: przez około 40% czasu przypadkowy użytkownik odwiedza stronę A albo: z prawdopodobieństwem prawie 40% przypadkowy użytkownik trafi na stronę A.

3.5. Inne zastosowania

Poniżej wymienimy i pokrótce opiszemy inne zastosowania twierdzenia Perrona–Frobeniusa.

- **Epidemiologia**:
  Wartość własna z twierdzenia Perrona–Frobeniusa determinuje tzw. próg Kermacka–McKendricka w pewnych modelach epidemiologicznych.

- **Modelowanie ekonomiczne**:
  - **Model Input–Output Leontiefa**:
    ukazuje zależności pomiędzy różnymi gałęziami gospodarki. Szukamy takiego minimalnego wektora zaopatrzenia, który zaspokoi dany popyt na rynku.
  - **Prawo Walrasa o równowadze rynków konkurencyjnych**:
    równowaga cenowa jest tu zdeterminowana przez wartość własną macierzy danego problemu
- **Topologia niskich wymiarów**: twierdzenie Perrona–Frobeniusa jest ważne dla klasyfikacji Thurstona homeomorfizmów powierzchni.
- **Iteracyjna analiza macierzy**:
  Twierdzenie Steina-Rosenberga wykorzystuje twierdzenie Perrona–Frobeniusa do porównania wskaźników zbieżności dwóch metod iteracyjnych używanych do rozwiązywania równań liniowych – są to metody Gaussa–Seidela oraz Jacobiego.

Literatura

[1] http://www.math.harvard.edu/library/sternberg/slides/1180912pf.pdf
[2] https://mohitagrawal.files.wordpress.com/2010/02/presentation.pdf
[3] http://facultypages.morris.umn.edu/math/Ma4901/Sp2014/Final/Final-AndrewLundborg.pdf
[4] http://www.math.upenn.edu/ kazdan/312F12/JJ/MarkovChains/markov_google.pdf
[5] http://stat.wharton.upenn.edu/ steele/Courses/956/Ranking/RankingFootballSIAM93.pdf
[6] http://www.math.utah.edu/ keener/lectures/rankings.pdf
[7] 17th Internet Seminar on Evolution Equations 2013/14: Positive Operator Semigroups and Applications, Andras Batkai, Marjeta Kramar Fijavz, Abdelaziz Rhandi, November 20, 2013
[8] http://infolab.stanford.edu/ backrub/google.html
[9] http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/S0036144599359449
[10] http://www.math.harvard.edu/ knill/teaching/math19b_2011/handouts/lecture34.pdf

[1] *Instytut Matematyki*
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
ul. Gołębia 24
31-007 Kraków
E-mail: barbara.ciesielska@student.uj.edu.pl

[2] *Instytut Matematyki*
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
ul. Gołębia 24
31-007 Kraków
E-mail: agnes.kowalczyk@student.uj.edu.pl

Przysłano: 31.05.2015; publikacja on-line: 31.08.2015.