Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 3 (2016), 9-11

Prace Koła Matematyków
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2016)

Paweł Wójcik[1]

O izometriach liniowych oraz punktach ekstremalnych[2]

Streszczenie. W tej pracy rozwiążemy i uogólnimy znane zadanie dotyczące izometrii liniowych traktowanych jako punkty ekstremalne domkniętej kuli jednostkowej w przestrzeni operatorów.

Abstract. In this paper we solve and generalize the known task which is related to linear isometries. We consider those isometries as extreme points of the closed unit ball in the space of operators.

1. Wstęp

Wszystkie zagadnienie opisywane w tym artykule dotyczą analizy funkcjonalnej i algebry liniowej. Potrzebne informacje można odszukać w książkach [1], [2]. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną (do końca pracy rozważamy tylko przestrzenie rzeczywiste). Niech X^* oznacza zbiór wszystkich funkcjonałów liniowych i ciągłych.

Niech $A \subset X$ będzie niepustym podzbiorem. Punkt $e \in A$ nazywamy *punktem ekstremalnym zbioru* A, jeśli z równości $e = (1-t)x + ty$ dla pewnego $t \in (0,1)$ oraz pewnych $x, y \in A$, wynika $x = y = e$. A więc punkt e jest punktem ekstremalnym zbioru A, jeśli nie leży wewnątrz żadnego odcinka łączącego punkty ze zbioru A (za wyjątkiem odcinka "trywialnego", redukującego się do zbioru jedno elementowego $\{e\}$).

Punkt $h \in A$ nazywamy *punktem eksponowanym domkniętej kuli jednostkowej* K_X, jeśli istnieje funkcjonał $f \in X^*$ taki, że $\|f\| = 1$ oraz dla każdego $x \in K_X \setminus \{h\}$ zachodzi nierówność $f(x) < 1$. Zatem h jest punktem eksponowanym domkniętej kuli jednostkowej K_X, jeśli istnieje hiperpłaszczyzna styczna do sfery jednostkowej tylko w punkcie h.

AMS (2010) Subject Classification: 46B20, 47L05.
Słowa kluczowe: punkty ekstremalne, operator liniowy, izometrie.
[2]On linear isometries and extreme points

Łatwe jest do sprawdzenia, że punkt eksponowany (domkniętej kuli jednostkowej) jest także punktem ekstremalnym (domkniętej kuli jednostkowej). Odwrotna implikacja nie jest prawdziwa.

Przestrzeń unormowaną nazywamy *ściśle wypukłą*, jeśli dla wszystkich $x, y \in X$, z warunków $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, $t \in (0,1)$ oraz $\|(1-t)x + ty\| = 1$ wynika, że $x \neq y$.

2. Dwa różne rozwiązania pewnego zadania

W książce [3] na stronie 101 znajduje się następujące zadanie: "Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Wykazać, że każda izometria U w $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ jest punktem ekstremalnym domkniętej kuli jednostkowej w $\mathcal{L}(\mathcal{H})$." Autor książki [3] podaje również następującą wskazówkę: "uzasadnić, że jeśli $U = (1-t)A + tB$ oraz $\|x\| = 1$, to $Ux = Ax = Bx$".

Postępujące zgodnie z tą wskazówką, możemy powyższe zadanie nawet wzmocnić, formułując (a następnie dowodząc) poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.1
Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. Niech Y będzie przestrzenią ściśle wypukłą. Załóżmy, że operator $U \in \mathcal{L}(X,Y)$ jest izometrią. Wówczas U jest punktem ekstremalnym kuli jednostkowej w przestrzeni $\mathcal{L}(X,Y)$.

Dowód. Załóżmy, że $U = (1-t)A + tB$ dla pewnego $t \in (0,1)$ i dla pewnych $A, B \in \mathcal{L}(X;Y)$ spełniających nierówności $\|A\| \leqslant 1$, $\|B\| \leqslant 1$. Ustalmy $x \in X$ taki, że $\|x\| = 1$. Wówczas $1 = \|x\| = \|Ux\| = \|(1-t)Ax + tBx\| \leqslant (1-t)\|Ax\| + t\|Bx\| \leqslant (1-t) + t = 1$. Oznacza to, że $1 = \|(1-t)Ax + tBx\|$ oraz $\|Ax\| \leqslant 1$, $\|Bx\| \leqslant 1$. Skoro przestrzeń Y jest ściśle wypukła, to $Ax = Bx$. Wykazaliśmy, że operatory A, B są równe na sferze jednostkowej, a zatem są równe. Stąd otrzymujemy równości $U = A = B$, które kończą dowód. ■

Natomist unikając stosowania wskazówki z [3], możemy zadanie rozwiązać inaczej (ale przy dodatkowym założeniu, że przestrzeń Hilberta jest skończenie wymiarowa).

Twierdzenie 2.2
Niech $\mathcal{H}$ będzie n–wymiarową przestrzenią Hilberta. Załóżmy ponadto, że operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jest izometrią. Wówczas U jest punktem eksponowanym kuli jednostkowej w przestrzeni $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Dowód. Ustalmy dowolnie bazą ortonormalną $\{e_1, \ldots, e_n\}$ w $\mathcal{H}$. Wówczas $\{Ue_1, \ldots, Ue_n\}$ jest również bazą ortonormalną w $\mathcal{H}$. Następnie zdefiniujmy funkcjonał $f\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ wzorem $f(T) := \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle Te_i | Ue_k \rangle$. Łatwo widać, że $f(U) = 1$ oraz $|f(T)| \leqslant 1$ dla wszystkich T spełniających $\|T\| \leqslant 1$. Zatem $\|f\| = 1$. Do zakończenia dowodu, wystarczy wykazać, że dla każdego operatora T spełniającego $\|T\| \leqslant 1$, ale różnego od U, zachodzi nierówność $f(T) < 1$. Załóżmy, że tak nie jest, tzn. istnieje pewien operator $T_o \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, który jednocześnie spełnia $\|T_o\| \leqslant 1$, $T_o \neq U$ oraz $f(T_o) = 1$. Wówczas

$$1 = f(T_o) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle T_o e_i | U e_k \rangle \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = 1.$$

Z powyższych równości i nierówności wynika, że $\langle T_o e_i | U e_k \rangle = 1$ dla wszystkich $i, k = 1, \ldots, n$. Skoro $\|T_o e_i\| \leqslant 1$ oraz $\|U e_k\| \leqslant 1$, to z równości $\langle T_o e_i | U e_k \rangle = 1$ wynika, że

$$T_o e_i = U e_k \text{ dla wszystkich } i, k = 1, \ldots, n.$$

Wiemy, że $U e_1 \neq U e_2$, bo U jest injekcją. Stąd i z powyższej równości dostajemy $T_o e_1 = U e_1 \neq U e_2 = T_o e_1$. Otrzymaną sprzecznością możemy zakończyć dowód. ■

References

[1] J. Chmieliński, *Analiza funkcjonalna - Notatki do wykładu*, Wydawnictwo naukowe Akademii Pedagogicznej w Krakowie, Kraków 2004.

[2] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics vol. 96, Springer 1985, MR 768926, Zbl 0558.46001.

[3] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Graduate Texts in Mathematics vol.118, Springer 1989, MR 971256, Zbl 0668.46002.

[1] *Instytut Matematyki*
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków
E-mail: pwojcik@up.krakow.pl

Przysłano: 6.07.2016; publikacja on-line: 6.09.2016.