Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 3 (2016), 61–76

Prace Koła Matematyków
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2016)

Galina Sinkevich[1]

Przyczynek do historii „epsilonistyki”[2]

Streszczenie. Przyjrzymy się historii powstania języka „$\varepsilon - \delta$” w pracach matematyków w XIX wieku. Pokażemy, iż mimo tego, że oznaczenia zostały wprowadzone przez Cauchy’ego w roku 1823, w pełni definicja „epsilon-delta” pojawiła się dopiero u Weierstrassa w roku 1861. Przytoczymy różne interpretacje tej problematyki przez matematyków w czasach późniejszych.

Abstract. This is a review of the genesis of $\varepsilon - \delta$ language in works of mathematicians of the 19th century. It shows that although the symbols ε and δ were initially introduced in 1823 by Cauchy, no functional relationship for δ as a function of ε was ever specified by Cauchy. It was only in 1861 that the epsilon-delta method manifested itself to the full in Weierstrass’ definition of a limit. The article gives various interpretations of these issues later provided by mathematicians. This article presents the text of the same author[47] which is slightly redone and translated to Polish.

Grattan-Guinnes pisał, że czytając Cauchy’ego, bardzo chce się rozumieć go z punktu widzenia Weierstrassa, ale jest to podejście ahistoryczne, a okres przejściowy do Weierstrassa też wymaga rekonstrukcji [28, p. 76].

Pojęcie ciągłości od wczesnych czasów starożytnych miało wiele aspektów – czasoprzestrzenny, fizyczny, geometryczny. Wraz z pojawieniem się analizy matematycznej i rozwojem pojęcia funkcji fizyczne i geometryczne pojmowanie ciągłości stało się niewystarczające i konieczna była jego arytmetyzacja.

W XVII wieku Leibniz sformułował *Zasadę ciągłości*: *Jeżeli zjawiska (lub dane) ciągle zbliżają się do siebie w ten sposób, że w rezultacie jedno przechodzi w drugie, to takie samo zjawisko powinno zajść również z odpowiednimi następstwami lub wynikami (lub niewiadomymi)* [15, p. 40].

John Wallis w *Arithmetica Infinitorum* (1655) wprowadził określenie: *granica wielkości zmiennej – to wielkość stała, do której zmienna zbliża się w taki sposób, że między nimi może być zrobiona różnica mniejsza, niż dowolna dana wielkość*

AMS (2010) Subject Classification: 01A50, 01A55.
Słowa kluczowe: historia matematyki, analiza, ciągłość, Lagrange, Ampere, Cauchy, Bolzano, Heine, Cantor, Weierstrass, Lebesgue.

[2]On the history of epsilontics

[53, p. 42]. Egzemplarz tej książki Wallisa, należący do Eulera, obecnie znajduje się w zasobie Eulera w Archiwum Akademii Nauk w Sankt–Petersburgu.

Euler uważał za ciągłe funkcje wyrażone jednym wzorem (dla niego funkcja $y = \frac{1}{x}$ jest ciągła w swoim obszarze określenia, a funkcja $y = |x|$ nieciągła, ponieważ jest określana dwoma wzorami symbol modułu pojawił się dopiero w XIX wieku u Weierstrassa). Według Eulera *reguły rachunku oparte są na zasadzie ciągłości, zgodnie z którą linie krzywe są opisywane ruchem ciągłym punktu, linia ciągła jest budowana w taki sposób, że jej natura jest wyrażana przy pomocy jednej określonej funkcji od x* [23, p. 21]. Słynne stało się sformułowanie ciągłości przez Eulera: *Narysować bez odrywania ołówka od papieru.*

W roku 1765 J. d'Alembert daje następującą definicję granicy: *Mówi się, że wielkość jest granicą innej wielkości, jeżeli druga może zbliżyć się do pierwszej bliżej, niż na dowolną daną wielkość, niezależnie od tego, jak mała jest ona zakładana, bez tego, jednak, aby zbliżająca się wielkość mogła kiedykolwiek przekroczyć wielkość, do której się zbliża; w ten sposób, różnica między taką wielkością a jej granicą jest bezwzględnie nieokreślona* [16, p. 155–156]. Definicja granicy u d'Alemberta miała więc charakter kinetyczny.

Do wzrostu zainteresowania kwestiami nieskończenie małych przyczynił się konkurs, ogłoszony z inicjatywy J. Lagrange'a przez Berlińską Akademię Nauk w roku 1786: *(…) potrzebna jest »zrozumiała i dokładna teoria tego, co w matematyce nazywane jest nieskończonym«* [56, p. 140]. Dwadzieścia trzy dzieła przysłane na konkurs nie zadowoliły Akademii: *(…) żądana zasada nie powinna ograniczać się rachunkiem nieskończenie małych, ale rozprzestrzeniać się również na algebrę i geometrię, w traktowaniu starożytnym* [56, p. 141]. Laureatem został szwajcarski matematyk, zamieszkały w tych latach w Warszawie, Simon l'Huilier (1750–1840). W jego pracy *Elementarne przedstawienie zasad rachunku wyższego*, wydanej przez Akademię w roku 1786, po raz pierwszy pojawia się symbol lim $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ [32, p. 31]. Później symbol ten zaczął stosować Lacroix[2].

Lagrange był rozczarowany metodami nieskończonościowymi i w kolejnych latach unikał stosowania nieskończenie małych, chociaż później zmienił swoje zdanie.

Najpopularniejszą metodą geometrów w XVIII wieku była aproksymacja[3]. Na przykład, *rozwiązując równanie typu $(x+1)^{\mu} = a$ gdy μ nie jest wielkością całkowitą, nie możemy znaleźć dokładnego rozwiązania, ale aproksymujemy je ciągiem nieskończonym. Po określeniu liczby skończonej elementów ciągu aproksymującego, geometrzy w XVIII wieku próbowali obliczyć górną granicę błędu aproksymacji różnicy między sumą ciągu a jego n–tą sumą częściową. Techniką dowodową była tu algebra nierówności* [26, p. 4].

Pierwsze dziesięciolecia XIX wieku - to okres „naiwnej" teorii funkcji – analiza matematyczna rozwijała się na bazie funkcji elementarnych, które są ciągłe i różniczkowalne, oraz na podstawie intuicyjnego i jakościowego określenia pojęcia granicy, otoczenia, ciągłości i zbieżności.

W 1797 r. Lagrange publikuje *Traité des fonctions analytiques.* Rozpatrując

[2] Sylvestre Lacroix (1765–1843) był następcą Lagrange'a w Szkole Politechnicznej i profesorem analizy, nauczycielem Cauchy'ego. W latach 1850 Weierstrass wprowadził symbol $\lim_{X\to C}$; w 1905 r. John Leathem, angielski matematyk, pierwszy użył symbolu $\lim_{X\to C}$ w jego książce [39].

[3] W XVIII wieku terminem „geometra" nazywano każdego matematyka.

funkcję fx i podstawiając zamiast x nową wielkość $x+i$, Lagrange twierdzi, że $f(x+i)$ może być rozwinięta w szereg według potęg dodatnich i. Współczynniki są znajdowane poprzez różniczkowanie, co jest słuszne dla wielu znanych funkcji. Rozpatrując pierwszy wyraz rozwinięcia, Lagrange otrzymuje $f(x+i)=fx+iP$, skąd $P=\frac{f(x+i)-fx}{i}$. Przy czym i może być na tyle małe, aby dowolny wyraz rozwinięcia był większy od sumy wszystkich następnych wyrazów rozwinięcia, i ma to miejsce również dla wszystkich mniejszych wartości i [57, p. 160—168]. Lagrange dodaje: *Doskonałość metod przybliżenia, w których stosowane są szeregi, zależy nie tylko od zbieżności szeregów, ale również od możliwości oceny błędu, pochodzącego od wyrazów, które są lekceważone; i można powiedzieć, że wszystkie metody przybliżone, stosowane w zadaniach geometrycznych i mechanicznych, są jeszcze bardzo niedoskonałe. Poprzednie twierdzenie w wielu przypadkach będzie dalekie od doskonałości, bez czego jego zastosowanie często bywa niebezpieczne [Lagrange, p. 67–68]*[4].

Od roku 1800 pojawiły się prace C. F. Gaussa na temat teorii szeregów, w których rozpatruje się szeregi jako ciągi sum cząstkowych [25].

W roku 1806 ukazał się w druku artykuł André Ampére'a *Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrete cette série à un terme quelconque* [1], mający bezpośredni związek z naszym tematem. Ampére dowodzi w nim na 33 stronach twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej i w oparciu o nie otrzymuje to, co my nazywamy szeregiem Taylora z resztą w postaci Lagrange'a. Juszkiewicz nazwał tę pracę Ampére'a próbą analitycznego udowodnienia różniczkowalności funkcji ciągłej [55, p. 243].

Podstawowym narzędziem dowodów u Ampére'a były nierówności[5], z pomocą których szacował on przybliżenia, charakteryzował błąd interpolacji. Podążając za Lagrange'em, Ampére rozpatruje $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ jako funkcję dwóch zmiennych x oraz i, wyrażającą stosunek różnicowy dwóch wartości x i $x+i$ jednej zmiennej, przy czym różnica ta nie jest równa ani zeru, ani nieskończoności dla jakiegokolwiek x, a dla $i=0$ zamienia się w $\frac{0}{0}$, ale nie jest ani równa zeru, ani nieskończoności. Funkcję tę Lagrange nazwał *wynikającą z pochodnej.*

Zauważmy, że symbol i oznacza tu liczbę rzeczywistą. Ampére uprzedza, że będzie rozpatrywał tylko funkcje zmiennej rzeczywistej. Ma się rozumieć, do rozpatrzenia domyślnie były włączane tylko „dobre” funkcje – ciągłe i różniczkowalne w przedziale skończonym. Sam Ampére w swoich pracach nigdzie nie używał terminów punkt, przedział, nachylenie, cięciwa, styczna, ani nie robił rysunków. Ampére zaznaczał, że funkcja powinna zmniejszać się lub zwiększać ze zmianą i. Zmienna x zmienia się od $x=a$ do $x=k$, odpowiednie wartości funkcji $f(x)$ oznaczane są jako A i K. Ampére dzieli przedział od $x=a$ do $x=k$ na wielkości pośrednie b,c,d,e, którym odpowiadają wartości funkcji B,C,D,E. Następnie tworzy on ilorazy różnicowe rodzaju $\frac{K-E}{k-e}$ i $\frac{E-A}{e-a}$ oraz dowodzi nierówności w rodzaju $\frac{E-A}{e-a}<\frac{K-A}{k-a}<\frac{K-E}{k-e}$. Dalej między starymi wartościami wprowadzane i zapisywane są nowe nierówności, w rezultacie dla pewnej wartości x następuje stopniowe

[4] Przytoczone z [55, p. 298] jako przekład A. P. Yushkevicha.

[5] Tej samej metody używali w swych pracach G. Lagrange, J.–B. Fourier (1822) i P. A. Rakhmanov (1803).

przybliżenie $f'(x)$ do wielkości $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$. Stąd okazuje się, że wielkość ta zawsze znajduje się między dwoma wartościami pochodnej, obliczonymi między x a $x+i$.

Załóżmy, że $x+i=z$ oraz $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=p$. Wówczas

$$f(z)=f(x)+p\cdot(z-x).$$

Kontynuując procedurę, Ampére otrzymuje

$$f(z)=f(x)+f'(x)\cdot(z-x)+p'\cdot(z-x)^2,$$

$$f(z)=f(x)+f'(x)\cdot(z-x)+\frac{f''(x)}{2}\cdot(z-x)^2+\frac{p''}{2}\cdot(z-x)^3,$$

$$f(z)=f(x)+f'(x)\cdot(z-x)+\frac{f''(x)}{2}\cdot(z-x)^2+\frac{f'''(x)}{2\cdot 3}\cdot(z-x)^3+\frac{p'''}{2\cdot 3}\cdot(z-x)^4,$$

i tak dalej.

Ampére przytacza przykłady rozwinięcia niektórych funkcji elementarnych. Następnie, rozpatrując $f(x)$ jako pierwotną w stosunku do $f'(x)$, otrzymuje on związek znaku pochodnej ze wzrastaniem lub zmniejszaniem się funkcji. Dowód Ampére'a wygląda bardzo topornie. Właśnie ta niedoskonałość wywołała u Augustina Louisa Cauchy'ego (1789–1857) chęć stworzenia prostej i ładnej konstrukcji, co, jak dalej zobaczymy, stało się źródłem stworzenia języka „$\varepsilon-\delta$".

Od 1813 r. Cauchy wykładał w Szkole Politechnicznej, a w 1816 został akademikiem. W roku 1821 ukazał się jego *Cours d'Analyse* [11] (przekład na język rosyjski – [10]), wygłoszony w Królewskiej Szkole Politechnicznej, w którym Cauchy podaje określenie pojęcia funkcji ciągłej: *Funkcja $f(x)$, dana między dwoma znanymi wartościami granicznymi (granicami) zmiennej x, jest funkcją ciągłą tej zmiennej, jeżeli dla wszystkich wartości zmiennej x, wziętych między tymi wartościami granicznymi (granicami), wartość liczbowa różnicy $f(x+\alpha)-f(x)$ nieskończenie zmniejsza się wraz z α. Inaczej mówiąc, funkcja $f(x)$ pozostaje ciągłą dla x między dwoma danymi wartościami granicznymi (granicami), jeżeli między tymi wartościami granicznymi (granicami) nieskończenie mały przyrost zmiennej zawsze prowadzi do nieskończenie małego wzrostu samej funkcji. Dodajmy także, iż funkcja $f(x)$, ciągła dla x, będzie ciągłą również dla sąsiednich (voisinage) wartości zmiennej x, znajdujących się między tymi samymi wartościami granicznymi (granicami), niezależnie od tego jak blisko od tych granic znajdowałby się x* [11, p. 43]. Pod pojęciem wartości granicznej (granicy) rozumie on tutaj punkt krańcowy rozpatrywanego przedziału.

W przyszłości, przy każdym nawiązaniu do funkcji ciągłej, Cauchy powtarzał to określenie i używał tylko jego. Angielski historyk matematyki J. Gray zaznacza: *Chociaż granice rzeczywiście pojawiły się w określeniach Cauchy'ego, to tylko w sensie punktu krańcowego obszaru określenia* [29, p. 62]. Gray wydziela tylko jeden z dwóch aspektów pojmowania granicy przez Cauchy'ego – jako granicy przedziału (granicę inse–ograniczoną), pozostawiając bez komentarza badania Cauchy'ego nieokreśloności w punkcie krańcowym (granica intra–ograniczona), na przykład, granica stosunku sinusa do łuku.

W pierwszym rozdziale *Kursu analizy* Cauchy rozpatruje szczególne wartości funkcji i udowadnia twierdzenie, które będzie mu potrzebne do rozpatrzenia równoważności nieskończenie małych.

TWIERDZENIE 1 ([10, P. 46])
Jeżeli ze wzrostem zmiennej x różnica $f(x+1)-f(x)$ dąży do znanej granicy k, to również ułamek $\frac{f(x)}{x}$ równocześnie dąży do tej samej granicy.

Dowód. Załóżmy, że wielkość k ma wartość skończoną i że ε jest dowolnie małą liczbą. Zgodnie z warunkiem, ze wzrostem x różnica $f(x+1)-f(x)$ dąży do granicy k; oprócz tego, zawsze można wziąć tak dużą liczbę h, że przy x, równym lub większym h, różnica ta stale będzie między granicami $k-\varepsilon, k+\varepsilon$. Przyjmując to, oznaczmy przez n jakąkolwiek liczbę całkowitą. Wtedy każda wielkość postaci: $f(h+1)-f(h), f(h+2)-f(h+1), \ldots, f(h+n)-f(h+n-1)$, a stąd ich średnia arytmetyczna, tj. $\frac{f(h+n)-f(h)}{n}$, będzie mieścić się między granicami $k-\varepsilon, k+\varepsilon$. Dlatego $\frac{f(h+n)-f(h)}{n} = k+\alpha$, gdzie α - wielkość między granicami $-\varepsilon$, $+\varepsilon$.

Teraz niech $h+n=x$, wówczas poprzednie równanie przekształci się w

$$\frac{f(x)-f(h)}{x-h} = k+\alpha, \tag{1}$$

stąd $f(x) = f(h) + (x-h)\cdot(k+\alpha)$ oraz

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(h)}{x} + \left(1-\frac{h}{x}\right)\cdot(k+\alpha). \tag{2}$$

Aby wartość x mogła wzrastać w sposób nieograniczony, wystarczy w sposób nieograniczony zwiększać liczbę n, nie zmieniając wartości h. Dlatego przyjmijmy h jako stałą w równaniu (2), a x przyjmiemy jako zmienną, dążącą do granicy ∞; wtedy wielkości $\frac{f(x)}{x}$, $\frac{h}{x}$, zawarte w drugiej części, będą dążyć do granicy zero, a cała druga część do granicy rodzaju $k+\alpha$, gdzie α stale mieści się między $-\varepsilon$ i $+\varepsilon$. Dlatego stosunek $\frac{f(x)}{x}$ będzie posiadał granicę w postaci wielkości, zawartej między $k-\varepsilon$ i $k+\varepsilon$.

Ponieważ wniosek ten jest słuszny, jakkolwiek małe nie byłoby ε, to niewiadomą granicą funkcji będzie wielkość k. Innymi słowami

$$\lim \frac{f(x)}{x} = k = \lim[f(x+1)-f(x)].$$

■

Analogicznie rozpatrywany jest przypadek, gdy k jest równe $\pm\infty$ [10, p. 46–49].

Jak widać, jest już tu struktura, której rozwój doprowadził do pojawienia się metody „$\varepsilon-\delta$”. Liczba ε jest tu wielkością skończoną, która jest również dowolnie małą oceną błędu. Cauchy udoskonala konstrukcję Ampére'a. Po upływie dwóch lat udoskonala on uzasadnienie tego dowodu. Lecz konieczność wykładania kursu tradycyjnie, bez eksperymentowania nowości, na razie nie pozwalała Cauchy'emu eksperymentować z wprowadzeniem nowych metod. Sądząc po tym, że Cauchy musiał wykładać studentom podstawy (sprowadzenie do wspólnego mianownika, podstawy trygonometrii, własności funkcji wykładniczych), przygotowanie podstawowe słuchaczy było skromne. Wiadomo, że studenci głośno protestowali przeciw studiowaniu liczb zespolonych – zupełnie niepotrzebnego, ich zdaniem, rozdziału matematyki.

W podstawowym kursie Cauchy'ego zawarte jest omówienie funkcji elementarnych z jedną i kilkoma zmiennymi, funkcji ze zmienną rzeczywistą i urojoną (zmienną zespoloną nazywano wówczas urojoną), ich właściwości, teoria granic z porównaniem wielkości nieskończenie małych, teoria szeregów, wzory interpolacyjne Lagrange'a.

W roku 1822 ukazała się w druku *Théorie analytique de la chaleur* J.B. Fouriera [24, p. 139], w której używa on δ–przyrostów.

W 1823 roku został opublikowany *Konspekt kursu wykładów z rachunku wielkości nieskończenie małych* [14], prowadzonego przez Cauchy'ego w Szkole Politechnicznej. Kurs przewidziany był na 40 wykładów. W języku rosyjskim ukazał się on pod nazwą *Rachunek różniczkowy i całkowy* w przekładzie W. J. Buniakowskiego w 1831 roku [12]. Zawarte w nim jest określenie granicy: *Jeżeli wielkości, przypisywane jakiejkolwiek wielkości zmiennej, coraz bardziej zbliżają się do określonej wielkości tak, że w końcu będą różnić się od niej dowolnie mało, to te ostatnie wielkości nazywają się granicą wszystkich pozostałych* [12, p. 3] i określenie funkcji ciągłej: *Jeżeli funkcja $f(x)$ zmienia się z wielkością x w taki sposób, że dla każdej wartości tej zmienianej wielkości, mieszczącej się w danych granicach, ma ona jedną zupełnie określoną wielkość, wtedy różnica $f(x+i)-f(x)$ między granicami wielkości x będzie wielkością nieskończenie małą; lecz funkcja $f(x)$, spełniająca ten warunek, nazywa się między tymi granicami funkcją ciągłą zmiennej x* [12, p. 11]. I dalej w drugim wykładzie: *Jeżeli wielkości zmienne są związane między sobą tak, że z wartości jednej danej wielkości można otrzymać wartości pozostałych, to należy pod tym rozumieć, że te różne wielkości są wyrażane przy pomocy jednej z nich, zwanej »zmienną niezależną«, a przedstawiane przez nią wielkości nazywane są »funkcjami« od tej zmiennej.*

Często w obliczeniach używana jest litera Δ dla oznaczenia jednoczesnego zwiększenia dwóch zmiennych, zależnych jedna od drugiej.

Tej uwagi nie było w kursie z 1821 roku. Tu Cauchy wskazuje na związek między przyrostem funkcji a przyrostem argumentu, ale nie konkretyzuje zależności ich zmiany, jak zrobił to czterdzieści lat później Weierstrass. Zamiast tego przytacza typowy dla XVIII i XIX wieku termin *jednocześnie* (simultané). Dodajmy, że trudność wyliczenia granicy była mierzona długością czasu potrzebnego na wykonanie obliczeń. Newton mówił np., że może obliczyć pole powierzchni pod parabolą w ciągu połowy kwadransa, a także: *w chwili, gdy upływa godzina, nie ma już więcej jakiejkolwiek figury wpisanej lub opisanej; ale każda z nich nakłada się na figurę krzywoliniową, która jest granicą, którą one osiągają*. Inni matematycy XVIII wieku także określali proces graniczny jako zajmujący pewną liczbę godzin, możliwy do wykonania w czasie. Przy czym symbol ε oznaczał błąd obliczenia, w tym również u Cauchy'ego.

Wtedy zmienna y będzie wyrażona jako funkcja zmiennej x równością

$$y = f(x). \tag{3}$$

W takim razie, jeżeli zmienna y jest wyrażona jako funkcja zmiennej x równością $y = f(x)$, to Δy, lub przyrost y od przyrostu Δx zmiennej x, będzie określony *wzorem*

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \tag{4}$$

(...) Oczywiste, (3) i (4) są związane, więc

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{5}$$

Załóżmy, że h oraz i są dwiema różnymi wielkościami, z których pierwsza jest skończona, a druga nieskończenie mała, oraz, że $\alpha = \frac{i}{h}$ jest wielkością nieskończenie małą, wynikającą ze stosunku tych dwóch wielkości. Jeżeli Δx odpowiada wielkość skończona h, wówczas wielkość Δy, zadana równością (5), będzie tak zwaną różnicą skończoną funkcji $f(x)$, i będzie, oczywiście, wielkością skończoną.

Jeżeli natomiast, odwrotnie, nadać Δx wartość nieskończenie małą, na przykład, $\Delta x = i = \alpha h$, to wartość Δy wynosi $f(x+i) - f(x)$ lub $f(x+\alpha h) - f(x)$, i będzie, oczywiście, nieskończenie mała. Łatwo to zauważyć na przykładzie funkcji $A^x, \sin x, \cos x$, którym odpowiadają różnice

$$A^{x+i} - A^x = (A^i - 1) \cdot A^x,$$

$$\sin(x+i) - \sin x = 2 \sin \frac{i}{2} \cos \left(x + \frac{i}{2} \right),$$

$$\cos(x+i) - \cos x = -2 \sin \frac{i}{2} \cos \left(x + \frac{i}{2} \right).$$

Każda z tych różnic ma czynnik $(A^i - 1)$ lub $\sin \frac{i}{2}$, który przy i zmierzającym do zera, zmierza do granicy równej zero.

W ten sposób, dla funkcji $f(x)$, przyjmującej w jedyny sposób wartości skończone dla wszystkich x, znajdujących się między dwoma danymi granicami, różnica $f(x+i) - f(x)$ będzie zawsze między tymi granicami nieskończenie mała, tj. $f(x)$ jest funkcją ciągłą w tych granicach, w których ona się zmienia.

Mówi się jeszcze, że w otoczeniu jakiejkolwiek wartości szczególnej zmiennej x funkcja $f(x)$ zawsze jest funkcją ciągłą tej zmiennej, jeżeli jest ona ciągła między dwoma, nawet bardzo bliskimi, granicami, zawierającymi ten dany punkt [14, p. 17].

Przy założeniu, że dowolna funkcja ciągła jest różniczkowalna, Cauchy udowadnia twierdzenie o wartości średniej:

Twierdzenie 2 ([12, p. 36])
Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła między dwoma granicami $x = x_0$, $x = X$. Oznaczmy przez A największą wartość jej pochodnej, przez B – najmniejszą wartość jej pochodnej między tymi samymi granicami. Wtedy iloraz różnicowy $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$ koniecznie będzie mieścić się między A a B. Oznaczmy literami δ, ε nieskończenie małe liczby, z których pierwsza niech będzie takiego rodzaju, że dla wartości liczbowych i, mniejszych od δ, oraz dla jakiejkolwiek wielkości x, mieszczącej się między granicami x_0, X, iloraz $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ będzie zawsze większy od $f'(x) - \varepsilon$ i mniejszy od $f'(x) + \varepsilon$.

Podobnie jak Ampére, Cauchy nie używa żadnych obrazów geometrycznych – ani punktów, ani odcinków.

Cauchy wspomina, że w tym dowodzie podąża za pracami Ampére'a, o których mowa była powyżej. Podobnie jak Ampére, Cauchy wstawia między x_0 a X nowe wartości $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ tak, żeby różnica $X - x_0$ została rozłożona na części dodatnie $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$, nie przekraczające δ. *Ułamki* $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, $\frac{f(X)-f(x_{n-1})}{X-x_{n-1}}$ *znajdując się między granicami: pierwszy:* $f'(x_0) - \varepsilon$, $f'(x_0) + \varepsilon$, *drugi:* $f'(x_1) - \varepsilon, f'(x_1) + \varepsilon$, *będą większe od* $A - \varepsilon$, *ale mniejsze od* $B + \varepsilon$. *Skoro ułamki mają mianowniki z jednym znakiem, to dzieląc sumę ich liczników przez sumę ich mianowników, otrzymamy ułamek średni, tj. taki, wartość którego znajduje się między mniejszym a większym z ułamków. Jednak* $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$ *jest ułamkiem średnim, więc mieści się on między granicami* $A-\varepsilon$ *a* $B+\varepsilon$. *Jest to słuszne dla dowolnie małego* ε, *tak więc* $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$ *znajduje się między granicami* A *a* B. Inaczej mówiąc,

$$A < f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+i) - f(x)}{i} < f'(x) + \varepsilon < B$$

dla $i < \delta$.

Cauchy genialnie uprościł dowód Ampére'a, wprowadzając prostsze oznaczenia. U Ampére'a dowód zajmuje połowę z 33 stron, u Cauchy'ego – dwie strony. Ampére wprowadza osiem wielkości pomocniczych i dla każdej buduje oszacowanie ilorazu, zamiast uśrednienia dowodzi on skomplikowane nierówności. U Cauchy'ego dowód jest elegancki i krótki.

Jednak Cauchy nie analizuje zależności ε i δ od siebie i zależności δ od kolejnej różnicy między sąsiednimi wartościami zmiennej. Praktycznie δ pojawia się w sposób deklaracyjny, bez jakiegokolwiek związku z pozostałą konstrukcją.

Amerykańska badaczka Judith Grabiner uważa, że Cauchy przekształcał technikę dowodową algebry nierówności w ścisłe narzędzie oceny błędu aproksymacji [26].

Holenderski badacz T. Koetsier sądzi, że Cauchy doszedł do swojej koncepcji ciągłości, analizując swój dowód twierdzenia o wartości średniej, możliwe, że tylko w przypadku wielomianów. Oczywiste jest, że u niego x_n to wielkości zmienne, różniące się od wielkości nieskończenie małej wielkością stałą a. Zgodnie z określeniem ciągłości Cauchy'ego, $f(x_n)$ powinny różnić się od $f(a)$ o wielkość nieskończenie małą. W odróżnieniu od Grabiner, Koetsier analizując dowód Cauchy'ego, nie wykrywa żadnych śladów języka $\varepsilon - \delta$ [34].

Analizując założenie Grabiner o tym, że Cauchy tylko oceniał błąd przybliżenia, Błaszczyk, Katz i Sherry dochodzą do wniosku: *W większym stopniu były to trudności analizy wielkości nieskończenie małych, trudności „epsilonistyki". Po otrzymaniu dolnego i górnego oszacowania Cauchy wnioskuje, że ostatnie wartości różnią się od pierwotnych dowolnie mało. Słychać tu słabe odgłosy* $\varepsilon - \delta$. *Tymczasem Leibniz korzystał z języka bliskiego Cauchy'emu: »Gdy mówią, że jakieś ciągi nieskończone mają sumę, ja rozumiem to tak, że dowolne szeregi skończone na tej samej zasadzie mają sumę, i że błąd zmniejsza się ze zwiększeniem ciągu, i staje się dowolnie mały.« Czy Cauchy stosował „epsilonistykę"? – w takim przypadku sto lat przed nim korzystał z niej Leibniz* [5, p. 18].

Jak pisze moskiewska badaczka A. W. Dorofeewa o twierdzeniu Cauchy'ego o średniej, *wniosek ten jest słuszny tylko wówczas, jeżeli można dobrać jedną i tę* *samą* δ *dla wszystkich* x*, a ten fakt wymaga udowodnienia* [19, p. 48].

W 1985 roku w Paryżu ukazała się drukiem książka Bruno Belhoste'a *Cauchy. 1789 – 1857* [3]. W 1997 roku został opublikowany jej przekład na język rosyjski [4]. Oto, co pisze autor na temat dowodu Cauchy'ego tego twierdzenia Lagrange'a: *Zamiast wzoru* $f(x+i)-f(x) = pi+qi^2+ri^3+\cdots$*, który pozwalał Lacroix przedstawić przyrost funkcji możliwej do rozwinięcia w szeregi i określić różniczkę, Cauchy udowodnił twierdzenie o przyrostach skończonych: Jeżeli funkcja* f *jest w sposób ciągły różniczkowalna między* x *a* $x+i$*, to istnieje rzeczywista liczba dodatnia* $\theta < 1$*, taka, że*

$$f(x+i) - f(x) = i \cdot f'(x+\theta i).$$

Wyprowadził on ten wzór, używając twierdzenia o wielkościach pośrednich, przedstawionego w »Analizie algebraicznej«, z nierówności

$$\inf_{x\in[x_0,X]} f'(x) \le \frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} \le \sup_{x\in[x_0,X]} f'(x), \tag{6}$$

która jest słuszna dla każdej funkcji ciągłej (a więc różniczkowalnej w pojęciu Cauchy'ego) między x_0 *a* X [Belhoste, p. 90].

Zauważmy, że twierdzenie o wartościach pośrednich w *Kursie analizy* z roku 1821 jest podane w następujący sposób:

Twierdzenie o funkcji ciągłej. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x między granicami $x = x_0$, $x = X$ i b mieści się między $f(x_0)$ a $f(X)$, to równanie $f(x) = b$ zawsze posiada rozwiązanie, znajdujące się między x_0 a X. [11, p. 50].

Belhoste uzupełnia twierdzenia Cauchy'ego rysunkami, podobnie jak my, prowadząc wykład dla studentów, uzupełniamy twierdzenie Lagrange'a wykresem funkcji i przedstawiamy cięciwę, łączącą punkty skrajne. Jednak w kursie Cauchy'ego nie ma żadnego rysunku, i nigdzie nie ma mowy o interpretacji geometrycznej twierdzeń. Sformułowanie, przytoczone przez Belhoste'a, ma charakter współczesny.

Dalej Belhoste kontynuuje: *Dowód, przeprowadzony przez Cauchy'ego w roku 1823 tylko dla funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły na* $[x_0, X]$*, rozsławił jego nowe metody i pozwolił zobaczyć różnicę, jaka istnieje między ciągłością zwykłą a jednostajną.*

Ale jego dowód nierówności (6) był oparty na zasadniczo błędnym założeniu: jeżeli funkcja f *jest ciągła (a więc jest różniczkowalna w sensie Cauchy'ego) między* x_0 *a* X *i jeżeli* ε *jest liczbą dodatnią na tyle małą, na ile tego chcemy, to jak twierdzi Cauchy, istnieje taka liczba dodatnia* δ[6]*, że dla wszystkich* i*, mniejszych od* δ *i dla wszystkich* x *między* x_0 *a* X

$$f'(x) - \varepsilon \le \frac{f(x+i)-f(x)}{i} \le f'(x) + \varepsilon.$$

W rzeczywistości, nierówność ta jest prawdziwa dla wszystkich x*, położonych między* x_0 *a* X*, tylko wtedy, jeśli* f' *jest funkcją jednostajnie ciągłą między dwoma tymi liczbami (lub jest ciągła w przedziale domkniętym ograniczonym* $[x_0, X]$*).*

[6] Zauważmy, że u Belhoste'a wyraźnie powiedziane jest, że dla epsilon dobierana jest delta, podczas gdy u Cauchy'ego takiego wyraźnego wskazania nie ma.

Brak wyraźnego rozgraniczenia między ciągłością a ciągłością jednostajną, jak pokazuje ten błąd, był słabym miejscem kursu Cauchy'ego. W każdym bądź razie, twierdzenie o przyrostach skończonych było stale używane i okazało się centralnym twierdzeniem rachunku różniczkowego [3, p. 90—91].

Zauważmy, że i Ampére, i Cauchy mieli na myśli właśnie przedział domknięty ograniczony. Wszystkie przykłady do tego twierdzenia były przytoczone dla funkcji elementarnych, które są jednostajnie ciągłe w przedziale domkniętym. Powtórzymy jeszcze raz słowa Cauchy'ego: *Mówi się, że w otoczeniu jakiejkolwiek wartości szczególnej zmiennej x funkcja $f(x)$ zawsze jest funkcją ciągłą tej zmiennej, jeżeli jest ona ciągła między dwoma, nawet bardzo bliskimi, granicami, zawierającymi ten dany punkt* [14, p. 17]. Formalizację wykonał E. Heine w roku 1872.

Nigdy więcej w swoich pracach, nawet w późniejszych, Cauchy nie używał języka „$\varepsilon - \delta$". Jak pisze Juszkiewicz, *określenie ciągłości u Cauchy'ego jest na tyle dalekie od »„epsilonistyki"«, jak jego definicja granicy* [58, p. 69]. Aby metoda działała, ε i δ powinny być związane między sobą i ze strukturą przedziału (obszaru). Przytoczymy jeszcze punkt widzenia Putnama: *Gdyby Weierstrass nie uzasadnił metody epsilon–delta, trzeba byłoby przyjąć za istniejące aktualnie wielkości nieskończenie małe, jak stało się to z liczbami urojonymi. My stopniowo rozszerzamy układ liczb rzeczywistych* [42].

Zależność epsilon–delta jest stopniowo odkrywana w pracach poświęconych jednostajnej zbieżności i jednostajnej ciągłości: w pracach P. Lejeune Dirichleta, JL Raabego; w pracach G. Stokesa [1847], Seidela [1847], Riemanna [1854, paragraph 5] i Cauchy'ego [1853].

Rozwojowi „epsilonistyki" towarzyszył rozwój pojęcia ciągłości. Rozpatrzymy zagadnienie o podobieństwie funkcji ciągłej u Bolzano i Cauchy'ego.

W roku 1817 w Pradze ukazała się drukiem niewielka broszura Bernarda Bolzano *Rein analytisches Beweis des Lehrsatszes, das zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung Liege.* Określa on funkcję ciągłą tak: *pod wyrażeniem, że funkcja $f(x)$ zmienia się zgodnie z zasadą ciągłości dla wszystkich wartości x, które znajdują się wewnątrz lub poza znanymi granicami, rozumieć należy tylko to, że jeżeli x jest jakąkolwiek z tych wartości, to różnica $f(x+\omega) - f(x)$ może być uczyniona mniejszą, niż jakakolwiek dana wielkość, jeżeli można przyjąć ω na tyle dowolnie małe, lub założyć, że $f(x+\omega) = f(x) + \omega$* [7].

Bolzano znał dzieła Lagrange'a i Lacroix.

Zauważalne podobieństwo idei Cauchy'ego i Bolzano nasunęło angielskiemu historykowi matematyki Ivory'emu Grattan-Guinnessowi myśl o zapożyczeniu.

Wnioski, które wyciąga Grattan–Guinness ze swojego badania, są takie: *Charakteryzując geniusz Cauchy'ego, nie chciałbym zbyt podkreślać, jak czujnie reagował on na bodźce zewnętrzne, usiłowałem nie osądzać go, a opisać głębokość i rozległość jego oryginalności. Bez wątpienia, on i Gauss byli głównymi matematykami pierwszych dziesięcioleci dziewiętnastego wieku: dlatego jego dzieła wzbudzają szczególne zainteresowanie historyków. Kierując swoją uwagę na pamflet Bolzana 1817, możliwe, że Cauchy, wzięty i aktywny matematyk–badacz oraz profesor trzech paryskich college'ów, po prostu nie zwrócił uwagi, że nie wymienił go albo wręcz zapomniał napisać, że czytał go (chociaż ja osobiście nie uważam tego* *wyjaśnienia za zadowalające).*

Zauważmy także jeszcze jedną „zbieżność idei” z mało znanymi twórcami niemieckimi, zadziwiająco podobną do historii z dzieła Bolzana. W kwietniu 1847 Grassmann, wówczas nauczyciel szkolny w Szczecinie, wysłał Cauchy'emu dwa egzemplarze swojego Ausdehnungslehre (1844 r.), ale nie otrzymał żadnego potwierdzenia; tym niemniej w latach 1847–1853 Cauchy publikuje kilka prac z clefs algébriques, które były oparte na tych samych ideach a nawet miały jednakowe oznaczenia [27].

W historii nauki jest sporo przykładów jednoczesnego powstania idei u różnych naukowców. Można nie zgodzić się z Grattan–Guinnesem w tym, że u podstaw tego leżało zapożyczenie. Tradycja wcześniej postawionego zagadnienia mogła być na tyle silna, że uwarunkowała jednakowe rozwiązanie, jednakową odpowiedź matematyków pracujących w różnych krajach. Tak było np. z geometrią nieeuklidesową, z pojęciem funkcji ciągłej (Bolzano i Cauchy opierali się na pracach Lagrange'a). Tak było również z pojęciem liczby niewymiernej i zasady ciągłości, gdy Méray, Heine i Cantor jednocześnie zaproponowali podobne koncepcje, które opierały się na kryterium Cauchy'ego zbieżności ciągu [45].

W latach 1868, 1869 i 1872 [41] ukazały się w druku prace Charlesa Méraya, w których przy pomocy granicy zbudował teorię liczb niewymiernych [48].

Od 1854 roku Karl Weierstrass rozpoczął wykłady na Uniwersytecie Berlińskim. Właśnie u niego pojawia się symbolika taka, jak $\lim_{n=\infty} p_n = \infty$ (opublikowana w 1856 roku praca [58]).

Niestety, sam Weierstrass nie opublikował, ani nawet nie zredagował swoich wykładów, które w większości przypadków dotarły do nas w notatkach jego słuchaczy. Eduard Heine martwił się z tego powodu: *Zasady Pana Weierstrassa są przedstawione bezpośrednio w jego wykładach i pośrednich doniesieniach ustnych, w rękopiśmiennych kopiach jego wykładów, i są nader szeroko rozpowszechnione, jednak nie były one opublikowane w redakcji autora pod jego kontrolą, co przeszkadza percepcji całościowej* [31, p. 172]. Jednak podstawowa koncepcja metody „ε–δ” kształtowała się na jego wykładach berlińskich. Jak pisze Juszkiewicz: *współczesne ujęcie rachunku różniczkowego, z jego ε, δ-techniką sformułowań i dowodów, ma swój początek, jak wiadomo, w wykładach Weierstrassa w Uniwersytecie Berlińskim, opracowania których zostały wydane przez jego słuchaczy* [57, p. 192].

Najstarszy znany tekst Weierstrassa z wykorzystaniem techniki „$\varepsilon - \delta$” to konspekt jego wykładu z rachunku różniczkowego, wygłoszonego w semestrze letnim w 1861 roku w Berlińskim Królewskim Instytucie Rzemieślniczym. *Konspekt był ułożony przez ucznia Weierstrassa Schwarza i teraz jest przechowywany w instytucie Mittag–Lefflera w Szwecji. Schwarz miał wtedy 18 lat i konspekt sporządził dla siebie, a nie do druku* [57, p. 192]. Zapiski Schwarza zostały odnalezione i opublikowane przez P. Dugaca [20]. W zapiskach tych po raz pierwszy pojawia się definicja funkcji ciągłej w języku „epsilonistyki”: *Jeżeli $f(x)$ jest funkcją x i x – wartością określoną, to przy przejściu x do $x+h$ funkcja zmieni się i będzie $f(x+h)$; różnica $f(x+h) - f(x)$ nazywana jest zmianą, którą uzyskuje funkcja ze względu na to, że argument przechodzi od x do $x+h$. Jeżeli możliwe jest określenie dla h takiej granicy δ, że dla wszystkich wartości h, według wartości bezwzględnej jeszcze mniejszych niż δ, $f(x+h)-f(x)$ stanie się jeszcze mniejsza, niż jakakolwiek, na ile* *to możliwe, mała wielkość ε, to można powiedzieć, że nieskończenie małym zmianom argumentu odpowiadają nieskończenie małe zmiany funkcji. Można bowiem powiedzieć, że pewna wielkość może stać się nieskończenie mała, jeżeli jej wartość bezwzględna może stać się mniejsza od jakiejkolwiek dowolnie wybranej małej wielkości. Jeżeli pewna funkcja jest taka, że nieskończenie małym zmianom argumentu odpowiadają nieskończenie małe zmiany funkcji, to można powiedzieć, że jest ona funkcją ciągłą argumentu, lub, że ona nieprzerwanie zmienia się wraz ze swoim argumentem* [57, p. 189].

W roku 1872 został opublikowany artykuł E. Heinego *Wykłady z teorii funkcji* (*Die Elemente der Functionenlehre*), gdzie podaje on definicję funkcji ciągłej wg Weierstrassa w języku epsilon–delta [31, p. 178]. Jednak granicę funkcji Heine określa na podstawie rachunku na podciągach [31, p. 182–183], co jest uzasadnione metodologicznie.

W roku 1885 ukazał się podręcznik O. Stolza *Wykłady z arytmetyki ogólnej według nowego punktu widzenia* (*Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: Nach den neueren Ansichten*), w którym Stolz przedstawił definicję Cauchy'ego wg Weierstrassa, w języku „$\varepsilon - \delta$" [52].

Legenda o tym, że język „epsilonistyki" stworzył Cauchy, pojawiła się wskutek „lekkiej ręki" H. Lebesgue'a w jego *Wykładach z całkowania i odnalezienia funkcji pierwotnych* w roku 1904: *Dla Cauchy'ego funkcja $f(x)$ jest ciągła dla wartości x_0, jeżeli, jaka by nie była liczba dodatnia ε, można znaleźć $\eta(\varepsilon)$ taką, że nierówność $|h| \leq \eta(\varepsilon)$ pociąga za sobą $|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq \varepsilon$; funkcja $f(x)$ jest ciągła w $[a, b]$, jeżeli relacja między ε a $\eta(\varepsilon)$ może być wybrana niezależnie od x_0 dla dowolnego x_0 w (a, b)* [40, p. 13]. W związku z tym Juszkiewicz pisał: *W swoim słynnym dziele z teorii całkowania H. Lebesgue z jakiegoś powodu przypisuje Cauchy'emu określenie ciągłości funkcji w punkcie, sformułowane w terminach »„epsilonistyki"« z początku XX wieku i charakteryzuje tę definicję jako klasyczną. To jeden z wielu przykładów tego, jak modernizowane są wypowiedzi autorów z dawnych czasów nawet przez tak wybitnych matematyków, jakim był H. Lebesgue* [58, p. 69].

Niestety, większość błędów historycznych zdarza się dlatego, że autorzy nie zwracają się do pierwoźródeł, a ufają pośrednim wolnym opowiadaniom, z reguły napisanym z użyciem języka współczesnego. Widzieliśmy wyżej interpretację Belhoste'a poprzez supremum i infimum dodanie obrazu geometrycznego; widzieliśmy interpretacje Lebesgue'a, Stolza i inne. Bolzano w roku 1817 i Cauchy w 1821 sformułowali definicje granicy w formie jakościowej i definicje funkcji ciągłej w języku przyrostów; Cauchy jeden raz zastosował ε i δ przy udoskonaleniu dowodu Ampére'a, ale Cauchy stosował ε i δ jako skończone oceny błędu, gdzie δ nie zależy od ε. Bolzano nigdzie nie używał tej techniki. Zgodnie z konspektem wykładu Weierstrassa z 1861 roku, to właśnie on jako pierwszy użył języka ε i δ jako metody.

W roku 1821, gdy Cauchy pisał swój *Kurs analizy*, w Berlinie urodził się Eduard Heine, który po upływie 51 lat sformułował pojęcie ciągłości jednostajnej. Weierstrass w roku 1821 miał 6 lat, i minęło około 40 lat, nim użył „epsilonistyki" z całą mocą.

W roku 1960 pojawiła się analiza niestandardowa, używająca wielkości aktualnie nieskończenie małych. Zwolennicy analizy niestandardowej nazywają język epsilon–delta wirusem w zdrowym ciele matematyki.

Obecnie w kursach analizy używane są trzy definicje granicy funkcji i ciągłości funkcji: według Heinego, Cauchy'ego i Weierstrassa. W subtelnych kwestiach, związanych z ciągłością, preferowany jest bardziej język epsilon–delta.

Literatura

[1] A.–M. Ampére, *Recherche sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent á une nouvelle démonstration du théorême de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque*, Journal de l'École Polytechnique, t. 6, n°13 (1806), p. 148–181.

[2] I. G. Bashmakova, *On the role of interpretation in the history of mathematics*, (Russian) Istor.–Mat. Issled., No. 30 (1986), 182–194, MR 0901194, Zbl 0615.01002.

[3] B. Belhoste, *Cauchy, 1789–1857* (French), Librairie Classique Eugène Belin, Paris, 1985, MR 0804232, Zbl 0593.01006.

[4] B. Belhoste, *Augustin Cauchy*, Nauka, Moscow, 1997.

[5] P. Błaszczyk, M. G. Katz, D. Sherry, *Ten misconceptions from the history of analysis and their debunking*, Found. Sci. 18, no. 1(2013), 43—74, MR 3031794, Zbl 1291.01018.

[6] B. Bolzano, *Paradoksy beskonechnogo (Paradoxes of the infinity)*, 1851, translation edited by I. Sleshinski, Mathesis, Odessa, 1911.

[7] B. Bolzano, *Rein analytischer beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prague, 1817, in: *Bernard Bolzano (1781–1848). Bicentenary. Early mathematical works. With an introduction by Luboš Nový and Jaroslav Folta*, Acta Historiae Rerum Naturalium necnon Technicarum Special Issue, 12. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 78. Československé Akademie Věd (ČSAV), Prague, 1981, MR 666704, Zbl 0534.01024

[8] F. Cajory, *A history of the conception of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse*, Open Court, Chicago and London, 1919, JFM 47.0035.12.

[9] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (German), Math. Ann. 5, no. 1(1872), 123—132, MR 1509769, Zbl 04.0101.02

[10] A. L. Cauchy, *Algebricheskij analiz* (*Analyse Algébrique*), translated by F. Ewald, V. Grigoriev, A. Iljin, Druck von Bär&Hermann, Leipzig, 1864.

[11] A. L. Cauchy, *Course d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnique* (1821). *Analyse Algébrique* w: Oeuvres complétes, Series 2, vol. 3., Cambridge Library Collection, Cambridge University Press, Cambridge, 2009, 1—471, MR 2856421, Zbl 1201.01042

[12] A. L. Cauchy, *Kratkoje izlozhenije urokov o differenzialnom i integralnom ischislenii* (*Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal*), translation by Bunjakovski, St. Petersburg, 1831.

[13] A. L. Cauchy, *Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données*, 1853, CR t. XXXVI, w: Oeuvres complétes, Series 1, vol. 12,Cambridge Library Collection, Cambridge University Press, Cambridge, 2009, p. 30–36, MR 2882785, Zbl 1201.01040

[14] A. L. Cauchy, *Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal*, 1823, Oeuvres complétes, Series 2, vol. 4, Cambridge Library Collection, Cambridge University Press, Cambridge, 2009, 9–261, MR 2865850, Zbl 1201.01051.

[15] J. M. Child (ed.), *The early mathematical manuscripts of Leibniz* Translated from the Latin texts published by Carl Immanuel Gerhardt with critical and historical notes by J. M. Child, The Open Court Publishing Co., Chicago-London, 1920, JFM 47.0035.09.

[16] J. D'Alembert, *Limite* (1765) w: *Encyclopédie méthodique ou par ordre de matiéres*, t. II, Padoue, 1789, p. 311–312.

[17] S. Demidov, *"Zakon nepreryvnosti" Leibniza i poniatie nepreryvnosti funkcii u Eulera* (*Leibniz' law of continuity and the notion of continuous function in Euler*), Istoriko-matematicheskie issledovania (Historical-mathematical researches), XXXII-XXXIII, 1990, p. 34–39.

[18] U. Dini, *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*, Pisa, 1878.

[19] A. Dorofeeva, *Formirovanie poniatija nepreryvnoy funkcii* (*The formation of the notion of continuous function*), Istoria i metodologija estestvennych nauk (History and methodology of natural sciences), Moscow State University, XI (Mathematics and mechanics), Moscow, 1971, p. 37–50.

[20] P. Dugac, *Elements d'analyse de Karl Weierstrass*, Paris, 1972.

[21] P. Dugac, *Poniatie predela i irrazionalnogo chisla, konzepzii Charles Meray i Karl Weierstrass* (*The notion of a limit and irrational number, concepts of Charles Méray and Karl Weierstrass*), Istoriko-matematicheskie issledovania (Historical-mathematical researches), XVIII, 1973, p. 176-180.

[22] L. Euler, *Institutiones calcului differentialis* (1755) w: L. Euler, *Differential calculus*, vol. 2, Gostechizdat, Moscow–Leningrad, 1949.

[23] L. Euler, *Vvedenije v analis beskonechno malych* (*Introductio in analysin infinitorum*), Moscow: Fismatgis, Vol. II, 1748.

[24] J. B. Fourier, *Théorie analitique de la chaleur*, Oeuvres, Paris, v. 1, 1822, Zbl 1271.01048.

[25] C. F. Gauss, *Grundbegriffe der Lehre von der Reihen* (1800), Werke, Leipzig: B. Bd. X/1, 1917, s. 390–394.

[26] J. Grabiner, *Who gave you the Epsilon? Cauchy and the Origin of Rigorous Calculus*, Am. Math. Mon. 90 (1983), 185–194, MR 691368, Zbl 0517.26003.

[27] I. Grattan–Guinness, *Bolzano, Cauchy and the "new analysis" of the early nineteenth century*, Arch. History Exact Sci. 6 (1970), no. 5, 372—400, MR 1554135, Zbl 0198.00601.

[28] I. Grattan–Guinness, *The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage*, Historia Math. 31 (2004), no. 2, 163–185, MR 2055640, Zbl 1063.01023.

[29] J. Gray, *Plato's ghost. The modern transformation of mathematics*, Princeton University Press, Princeton, NY, 2008, Zbl 1166.00005.

[30] H. Hankel, *Grenze*, *Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste*, Leipzig: Brockhaus, Vol. 90, 1870/71, 185—211.

[31] E. Heine, *Die Elemente der Functionenlehre*, (German), J. Reine Angew. Math. 74 (1872), 172-–188, MR 1579539, JFM 04.0187.01.

[32] S.-A.-J. L'Huilier, *Exposition Élémentaire des Principles des calcul supérieurs*, 1786.

[33] M. Katz, D. Sherry, *Leibniz's laws of continuity and homogeneity* Notices Am. Math. Soc. 59, No. 11 (2012), 1550–1558, MR 3027109, Zbl 1284.03064.

[34] T. Koetsier, *Lakatos, Lakoff and Núñez: Towards a Satisfactory Definition of Continuity. In Explanation and Proof in Mathematics*, Philosophical and Educational Perspectives, edited by G. Hanna, H. Jahnke, H. Pulte, Springer, 2009.

[35] S. F. Lacroix, *Traité du calcul differentiel et du calcul intégral*, Paris, 1797, 1798, 1800.

[36] S. F. Lacroix, *Traité élementaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, 1806, 1828.

[37] J. Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris, 2–ed., v. 1.

[38] J. Lagrange, *Théorie des fonctions analytique*, Oeuvres de Lagrange, v. 9, Paris, 1881.

[39] J. G. Leathem, *Volume and Surface Integrals Used in Physics*, Cambridge University Press. VI u, 1905, s. 48, JFM 36.0358.01.

[40] H. Lebesgue, *Integrirovanie i otyskanije primitivnych funkzij* (*Leçons sur l'intégration et la recherché des fonctions primitives*), Moscow–Leningrad, 1934.

[41] C. Méray, *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*, Par Charles Méray. Publication, F. Savy, XXIII, Paris, 1872, p. 310.

[42] H. Putnam, *What is mathematical truth?*, Proceedings of the American Academy Workshop on the Evolution of Modern Mathematics (Boston, Mass., 1974). Historia Math. 2 (1975), no. 4, 529—533, MR 479920.

[43] B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. t. XIII, 1868, 87–132.

[44] Ph. L. Seidel, *Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen*, Abhandl. Der Math. Phys. Klasse der Kgl. Bayerschen Akademie der Wissenschaften V, München, 1847, 381–394.

[45] G. Sinkevich, *Concepts of a Numbers of C. Méray, E. Heine, G. Cantor, R. Dedekind and K. Weierstrass*, Technical Transactions, Kraków, 2014, p. 211–223.

[46] G. Sinkevich, *Heinrich Eduard Heine. Teoria funkzij* (*Heinrich Eduard Heine. Function theory*), Matematicheskoye modelirovanie, chislennyie metody i komplexy programm (Mathematical simulation, calculus of approximations and program system), St.-Petersburg, 18(2012), p. 6–46.

[47] G. Sinkevich, *K istorii „epsilonistyki”* (*To the history of epsilonics*), Mathematics in Higher Education (Matematika v vyshem obrasovanii), No. 10 (2012), p. 149—166.

[48] G. Sinkevich, *Rasvitie poniatija nepreryvnosty u Ch. Méray* (*The development of notion of continuity in Ch. Méray*), Trudy X Miejzdunarodnych Kolmogorovskich chtenij (Proceeding of X Kolmogorov's reading. Jaroslavl, 2012, p. 180–185.

[49] G. Sinkevich, *Uliss Dini I poniatie nepreryvnosti* (*Uliss Dini and the notion of continuity*), Istoria nauki i techniki (The history of science and technics), Moscow, 10(2012), p. 3–11.

[50] G. G. Stokes, *On the Critical values of the sums of Periodic Series*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. VIII, p. 533–583.

[51] O. Stolz, *Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung* (German), Math. Ann. 18, no. 2 (1881), 255-–279, MR 1510103, JFM 13.0203.01.

[52] O. Stolz, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: Nach den neueren Ansichten*, Bd. I. Leipzig, 1885, p. 156—157.

[53] J. Wallis, *The arithmetic of Infinitesimals* (1656), translated by J. A. Stedall, USA, Springer, 2004.

[54] K. Weierstrass, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre*, Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner-Archiv für mathematic. Band 9, Reprint 1989.

[55] A. Yushkevich, *Istoria matematiki* (*The History of Mathematics*), Moscow: Nauka, Vol. 3 (1972).

[56] A. Yushkevich, *L. Carnot i konkurs Berlinskoj akademii nauk 1786 na temu o matematicheskoj teorii beskonechnogo* (*L.Carnot and the competition of Berlin academy of Sciences 1786 on the mathematical theory of infinite*), Istoriko-matematicheskie issledovania (Historical-mathematical researches), XVIII (1973), p. 132—156.

[57] A. Yushkevich, *Chrestomatija po istorii matematiki. Matematicheskij analis* (*Reading book on the history of mathematics. Analysis*), Moscow: Prosveschenije, 1977.

[58] A. Yushkevich, *Razvitije ponjatija predela do K. Weierstrassa* (*The development of the notion of limit till K. Weierstrass*),Istoriko-matematicheskie issledovania (Historical-mathematical researches), Moscow: Nauka, XXX (1986), p. 1—81.

[1] *Sankt-Petersburski Uniwersytet*
Architektury i Budownictwa
Sankt-Petersburg, Rosja
(*Saint Petersburg State University of*
Architecture and Civil Engineering
VtorajaKrasnoarmejskajaul. 4,
St. Petersburg, 190005, Russia)
E-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Przysłano: 10.05.2016; publikacja on-line: 18.10.2016.