Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 4 (2017), 29–38

Prace Koła Matematyków
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2017)

Anna Zborowska[1]

Potęga macierzy Toeplitza

Streszczenie. W artykule będziemy rozpatrywać macierze Toeplitza odnosząc się do ich ciekawej struktury. Zwrócimy uwagę na to, że nie zawsze potęga macierzy Toeplitza będzie macierzą Toeplitza. Przytoczymy i przeanalizujemy z [3] warunek konieczny i wystarczający na to, aby każda dodatnia i całkowita potęga macierzy Toeplitza była macierzą Toeplitza.

Abstract. In the article we will consider the Toeplitz matrices refer to their interesting structure. We will draw attention to the fact that the powers of a Toeplitz matrix is not necessarily Toeplitz matrix. We will cite and analyze from [3] the necessary and sufficient condition, that all positive integer powers of a Toeplitz matrix is still Toeplitz matrices.

1. Wstęp

W pracy będziemy rozpatrywać macierze Toeplitza wyróżniające się specyficzną strukturą. Poniższa praca będzie dotyczyła wybranych własności macierzy, które mają te same wartości na poszczególnych przekątnych. Macierze takie pojawiają się w sposób naturalny w rozważaniach związanych z różnymi zagadnieniami matematycznymi i mają szerokie zastosowania, które zostały opisane w [1]. Przedstawione zagadnienia w większości pochodzą z pracy [3]. Głównym celem tego artykułu jest uszczegółowienie dowodów przeprowadzonych w [3] oraz przytoczenie i przeanalizowanie warunku koniecznego i wystarczającego na to, aby każda dodatnia i całkowita potęga macierzy Toeplitza była macierzą Toeplitza.

2. Podstawowe pojęcia

Na początku przypomnijmy definicje z teorii macierzy.

AMS (2010) Subject Classification: 05B20, 65F99.
Słowa kluczowe: macierz Toeplitza, iloczyn macierzy, przekątna macierzy.
[2] *The power of Toeplitz matrix*

Definicja 2.1
*F*unkcję $A : I_m \times J_n \to \mathbb{C}$, gdzie $I_m = \{1,\ldots,m\}$, $J_n = \{1,\ldots,n\}$ taką, że $A(i,j) = a_{i,j}$ nazywamy $m \times n$ wymiarową *macierzą* A. Macierz A można zapisać

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & & & a_{m,n} \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

gdzie $m, n \in \mathbb{N}$. Macierz A utworzoną z m wierszy i n kolumn, na które składają się elementy $a_{i,j}$ będziemy oznaczać jako $[a_{i,j}]$. Zbiór wszystkich $m \times n$ wymiarowych macierzy będziemy oznaczać przez $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C})$.

Definicja 2.2
Niech $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$. Elementy $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ macierzy A nazywamy diagonalnymi. Macierz kwadratową A nazywamy *diagonalną*, gdy $a_{i,j} = 0$ dla $i \neq j$. Ponadto, jeżeli elementy $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ macierzy diagonalnej są równe, wtedy macierz A nazywamy *macierzą skalarną*.

Definicja 2.3
Macierz $A_d = [a_{i,j}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ taką, że $a_{i,j} = 0$ dla $i < j$, czyli macierz postaci

$$A_d = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & & a_{n,n} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

nazywamy *macierzą dolnotrójkątną*. Odwrotnie jeżeli $a_{i,j} = 0$ dla $i > j$, to macierz nazywamy *macierzą górnotrójkątną*.

W celu lepszego zrozumienia przeprowadzonych w dalszej części rozumowań, przypomnijmy definicje iloczynu macierzy, biorąc pod uwagę wyłącznie macierze kwadratowe.

Definicja 2.4
Iloczynem macierzy kwadratowych $A = [a_{i,j}]\,, B = [b_{i,j}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ nazywamy taką macierz $C = [c_{i,j}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$, której wyrazami są liczby

$$c_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p} b_{p,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j},$$

dla każdej pary i, j, gdzie $i, j = 1, \ldots, n$.

3. Macierze Toeplitza

Definicja 3.1
Macierz $T_n = [t_{i,j}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ nazywamy *macierzą Toeplitza*, jeżeli $t_{i,j} = t_{k,l}$ zawsze, gdy $j - i = l - k$, gdzie $i, j, k, l = 0, 1, \ldots, n-1$. Dla macierzy Toeplitza wprowadźmy oznaczenie $t_{j-i} = t_{i,j}$. Zatem jest to macierz wymiaru $n \times n$, której ogólna postać jest następująca

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & & & \\ t_{-2} & t_{-1} & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & t_0 & t_1 \\ t_{-(n-1)} & & & \cdots & t_{-1} & t_0 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Przykład 3.2
Przykłady macierzy Toeplitza

(1) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ i & 7 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & i & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & i & 7 & 4 \end{bmatrix}$,

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Można zastanawiać się, jak silna jest struktura macierzy Toeplitza. Naturalnym podczas badania właściwości tego typu macierzy jest pytanie, czy pewne działania są wewnętrzne w zbiorze wszystkich macierzy Toeplitza ustalonego wymiaru. Spójrzmy na poniższy przykład.

Przykład 3.3

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 9 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 15 & 10 \\ 9 & 5 & 2 & 15 \\ 5 & 9 & 5 & 2 \\ 11 & 5 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Zastanówmy się czy suma dwóch macierzy Toeplitza jest zawsze macierzą o takiej samej strukturze. Podczas dodawania macierzy Toeplitza $A = [a_{j-i}]$ oraz $B = [b_{j-i}]$ dodajemy odpowiednio elementy $a_{i,j} + b_{i,j}$ dla $i, j = 0, \ldots, n-1$. Niech $C = [a_{i,j} + b_{i,j}] = [a_{j-i} + b_{j-i}] = [c_{j-i}]$. Zatem suma dwóch macierzy Toeplitza jest zawsze macierzą Toeplitza.

Sytuacja okazuje się bardziej skomplikowana jeśli rozważymy działanie mnożenia.

Przykład 3.4

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 8 \\ 24 & 5 & 1 & 4 \\ 12 & 24 & 5 & 1 \\ 3 & 12 & 24 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & 4 & 1 \\ 12 & 9 & 1 & 4 \\ 6 & 12 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 & 143 & 98 & 35 \\ 105 & 110 & 143 & 98 \\ 294 & 105 & 110 & 143 \\ 429 & 294 & 105 & 110 \end{bmatrix}.$$

Zatem istnieją takie macierze Toeplitza, których iloczyn jest macierzą Toeplitza. Nasuwa się pytanie czy jest tak zawsze. Kolejny przykład pokazuje, że nie.

Przykład 3.5

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 21 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 21 & 2 & 4 \\ 14 & 7 & 21 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94 & 80 & 59 & 44 \\ 161 & 94 & 73 & 59 \\ 224 & 161 & 87 & 73 \\ 280 & 224 & 154 & 87 \end{bmatrix}.$$

Pozostaje rozstrzygnąć, czy przy danym dodatkowym założeniu dla pewnego podzbioru zbioru wszystkich macierzy Toeplitza mnożenie jest działaniem wewnętrznym. Zanim podamy odpowiedni lemat zdefiniujmy przekątne macierzy Toeplitza.

Definicja 3.6
Dla każdej macierzy $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ *r–górno diagonalną przekątną* nazywamy równoległą przekątną do głównej przekątnej, której elementy są postaci $a_{i,i+r}$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n-r$ dla $r = 1, 2, \ldots, n-1$. Natomiast *r–dolno diagonalną przekątną* nazywamy przekątną, której elementy są postaci $a_{i,i-r}$, gdzie $i = r+1, r+2, \ldots, n$ dla $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Lemat 3.7 ([3], Lemma 1)
Niech $A = [a_{j-i}], B = [b_{j-i}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ będą nieskalarnymi macierzami Toeplitza dla $n \geq 2$. Jeżeli $a_i b_{j-n} = a_{i-n} b_j$ dla $i, j = 1, \ldots, n-1$, to macierz $AB = [c_{i,j}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ jest macierzą Toeplitza. Ponadto jeśli $AB = C = [c_{j-i}]$, wtedy $c_i a_{j-n} = c_{i-n} a_j$ oraz $c_i b_{j-n} = c_{i-n} b_j$, dla $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Dowód. Niech $A = [a_{i,j}] = [a_{j-i}], B = [b_{i,j}] = [b_{j-i}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ będą macierzami Toeplitza, które nie są skalarne, $n \geq 2$ oraz $AB = C = [c_{i,j}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$. Z definicji iloczynu macierzy kwadratowych mamy

$$c_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p} b_{p,j} = \sum_{p=1}^{n} a_{p-i} b_{j-p}, \text{ dla } i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Dla $r = 1, 2, \ldots, n-1$, r–górno diagonalne przekątne mają postać

$$c_{i,i+r} = \sum_{p=1}^{n} a_{p-i} b_{i+r-p} = \sum_{q=1-i}^{n-i} a_q b_{r-q}, \text{ dla } i = 1, \ldots, n-r, \tag{3.3}$$

$(n-r)$–dolno diagonalne przekątne mają postać

$$c_{i,i+r-n} = \sum_{p=1}^{n} a_{p-i} b_{i+r-n-p} = \sum_{q=1-i}^{n-i} a_q b_{r-n-q}, \text{ dla } i = n-r+1, \ldots, n, \tag{3.4}$$

natomiast elementy na głównej przekątnej mają postać

$$c_{i,i} = \sum_{p=1}^{n} a_{p-i} b_{i-p} = \sum_{q=1-i}^{n-i} a_q b_{-q}, \text{ dla } \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Załóżmy, że zachodzi warunek $a_i b_{j-n} = a_{i-n} b_j$ dla $i, j = 1, \ldots, n-1$. Rozpatrzmy pierwszy przypadek gdy $a_i a_{i-n} = 0$ dla każdego $i = 1, \ldots, n-1$. Wówczas dla każdego $j = 1, \ldots, n-1$, $0 = a_i b_{j-n} a_{i-n} b_j = a_i^2 b_{j-n}^2 = a_{i-n}^2 b_j^2$. Istnieje takie $i_0 = 1, \ldots, n-1$, że $a_{i_0} = 0$ oraz $a_{i_0-n} \neq 0$ lub $a_{i_0} \neq 0$ oraz $a_{i_0-n} = 0$, co wynika z faktu, że macierz A nie jest skalarna. W pierwszym przypadku jeżeli $a_{i_0-n} b_j = a_{i_0} b_{j-n} = 0$, to $b_j = 0$ dla każdego $j = 1, \ldots, n-1$, to znaczy że B jest dolnotrójkatną macierzą Toeplitza. Zauważmy że B nie jest macierzą skalarną, zatem istnieje $j_0 = 1, \ldots, n-1$ takie że $b_{j_0-n} \neq 0$, co implikuje nam że $a_i = 0$. Zatem $a_i b_{j_0-n} = a_{i-n} b_{j_0} = 0$, stąd A jest dolnotrójkątną macierzą Toeplitza. Pokażemy teraz że lemat zachodzi gdy obie macierze są dolnotrójkątnymi macierzami Toeplitza, czyli w przypadku gdy

$$AB = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{-1} & a_0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{-(n-1)} & \cdots & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{-1} & b_0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ b_{-(n-1)} & \cdots & b_{-1} & b_0 \end{bmatrix}.$$

Dla $r = 1, 2, \ldots, n-1$ mamy

$$c_{i,i+r} = \sum_{q=1-i}^{n-i} a_q b_{r-q} = 0 \text{ dla } \ i = 1, \ldots, n-r.$$

Elementy poniżej głównej przekątnej dla $i = n-r+1, \ldots, n$ są postaci

$$\begin{aligned} c_{i,i+r-n} &= \sum_{q=1-i}^{n-i} a_q b_{r-n-q} = \sum_{q=1-i}^{n-i} a_{q-n} b_{r-q} = \sum_{q=r-n}^{-i} a_q b_{r-n-q} \\ &= \sum_{q=r-n}^{-i} a_q b_{r-n-q} + \sum_{q=-i+1}^{0} a_q b_{r-n-q} = \sum_{q=r-n}^{0} a_q b_{r-n-q}. \end{aligned}$$

Elementy na głównej przekątnej dla $i = 1, 2, \ldots, n$ są postaci

$$c_{i,i} = \sum_{q=1-i}^{n-i} a_q b_{-q} = a_0 b_0 \text{ dla } \ i = 1, \ldots, n.$$

Podsumowując lemat jest prawdziwy gdy obie macierze są dolnotrójkątnymi macierzami Toeplitza oraz w przypadku gdy obie macierze są macierzami górnotrójkątnymi, czyli gdy istnieje $i_0 = 1, \ldots, n-1$ takie, że $a_{i_0} \neq 0$ oraz $a_{i_0-n} = 0$. Oznaczmy

$a_i := b'_{-i}$ oraz $b_i := a'_{-i}$ gdzie $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Wtedy

$$\begin{aligned}(AB)^T &= \left[\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{bmatrix}\right]^T \\ &= \begin{bmatrix} a'_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a'_{-1} & a'_0 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ a'_{-(n-1)} & \cdots & a'_{-1} & a'_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b'_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b'_{-1} & b'_0 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ b'_{-(n-1)} & \cdots & b'_{-1} & b'_0 \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Zatem korzystając z pierwszego przypadku, gdy obie macierze są dolnotrójkatne otrzymujemy

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} c'_0 & 0 & \cdots & 0 \\ c'_{-1} & c'_0 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ c'_{-(n-1)} & \cdots & c'_{-1} & c'_0 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Dla pewnych $c'_{-i} \in \mathbb{C}$. Oznaczmy $c'_i := c'_{-i} \in \mathbb{C}$, gdzie $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Wtedy

$$AB = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ 0 & c_0 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & c_1 \\ 0 & \cdots & 0 & c_0 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Lemat jest prawdziwy gdy obie macierze są macierzami górnotrójkątnymi Toeplitza.

Przypadek gdy $b_i b_{i-n} = 0$ dla każdego $i = 1, \ldots, n-1$ dowodzi się podobnie jak przypadek $a_i a_{i-n} = 0$ dla każdego $i = 1, \ldots, n-1$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy istnieją $p, q = 1, \ldots, n-1$ takie, że $a_p a_{p-n} \neq 0$ oraz $b_q b_{q-n} \neq 0$. Zakładamy że $a_i b_{j-n} = a_{i-n} b_j$. Pierwszy element na górnodiagonalnej przekątnej ma postać

$$\begin{aligned} c_{1,1+r} &= \sum_{q=0}^{n-1} a_q b_{r-q} = \sum_{q=0}^{n-2} a_q b_{r-q} + a_{n-1} b_{r-n+1} \\ &= a_{-1} b_{r+1} + \sum_{q=0}^{n-2} a_q b_{r-q} = \sum_{q=-1}^{n-2} a_q b_{r-q} = c_{2,2+r}. \end{aligned}$$

Zatem pierwszy element tej przekątnej jest równy drugiemu. Podobnie

$$\begin{aligned}c_{2,2+r} &= \sum_{q=-1}^{n-2} a_q b_{r-q} = \sum_{q=-1}^{n-3} a_q b_{r-q} + a_{n-2} b_{r-n+2} \\ &= a_{-2} b_{r+2} + \sum_{q=-1}^{n-3} a_q b_{r-q} = \sum_{q=-2}^{n-3} a_q b_{r-q} = c_{3,3+r}.\end{aligned}$$

W rezultacie drugi element jest równy trzeciemu. Postępując analogicznie otrzymujemy przedostatni element, który możemy zapisać następująco

$$\begin{aligned}c_{n-r-1,n-1} &= \sum_{q=r}^{r+1} a_q b_{r-q} = \sum_{q=r-n+2}^{r} a_q b_{r-q} + a_{r+1} b_{-1} \\ &= a_{r-n+1} b_{n-1} + \sum_{q=r-n+2}^{r} a_q b_{r-q} = \sum_{q=r-n+1}^{r} a_q b_{r-q} = c_{n-r,n}.\end{aligned}$$

Zatem elementy na górnej przekątnej dla $r = 1, 2, \ldots, n-1$ są równe oraz elementy na głównej przekątnej są równe. Podobnie dla $r = 2, 3, \ldots, n-1$ elementy na dolnych przekątnych są postaci

$$\begin{aligned}c_{n-r+1,1} &= \sum_{q=r-n}^{r-1} a_q b_{r-n-q} = \sum_{q=r-n}^{r-2} a_q b_{r-n-q} + a_{r-1} b_{1-n} \\ &= a_{r-n-1} b_1 + \sum_{q=r-n}^{r-2} a_q b_{r-n-q} = \sum_{q=r-n-1}^{r-2} a_q b_{r-n-q} = c_{n-r+2,2}\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}c_{n-r+2,2} &= \sum_{q=r-n-1}^{r-2} a_q b_{r-n-q} = \sum_{q=r-n}^{r-2} a_q b_{r-n-q} + a_{r-2} b_{2-n} \\ &= a_{r-n-2} b_2 + \sum_{q=r-n-1}^{r-3} a_q b_{r-n-q} = \sum_{q=r-n-2}^{r-3} a_q b_{r-n-q} = c_{n-r+3,3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{n-1,r-1} &= \sum_{q=2-n}^{1} a_q b_{r-n-q} = \sum_{q=2-n}^{0} a_q b_{r-n-q} + a_1 b_{r-n-1} \\ &= a_{1-n} b_{r-1} + \sum_{q=2-n}^{0} a_q b_{r-n-q} = \sum_{q=1-n}^{0} a_q b_{r-n-q} = c_{n,r}.\end{aligned}$$

Zatem wszystkie elementy na $(n-r)$- dolno diagonalnych przekątnych są równe. Ponadto jeśli przyjmiemy $AB = C = [c_{j-i}]$, to

$$\begin{aligned} c_i a_{j-n} &= b_0 a_i a_{j-n} + a_0 b_i a_{j-n} + \sum_{\substack{q=i-n+1\\ q\neq 0}}^{i-1} a_q b_{i-q} a_{j-n} \\ &= b_0 a_{i-n} a_j + a_0 b_{i-n} a_j + \sum_{\substack{q=i-n+1\\ q\neq 0}}^{i-1} a_q b_{i-q-n} a_j = c_{i-n} a_j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_i b_{j-n} &= b_0 a_i b_{j-n} + a_0 b_i b_{j-n} + \sum_{\substack{q=i-n+1\\ q\neq 0}}^{i-1} a_q b_{i-q} b_{j-n} \\ &= b_0 a_{i-n} b_j + a_0 b_{i-n} b_j + \sum_{\substack{q=i-n+1\\ q\neq 0}}^{i-1} a_q b_{i-n-q} b_j = c_{i-n} b_j, \end{aligned}$$

dla każdego $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$. Zatem faktycznie $c_i a_{j-n} = c_{i-n} a_j$ oraz $c_i b_{j-n} = c_{i-n} b_j$ dla $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$.

■

Lemat 3.8 ([3], Lemma 2)
Niech $A = [a_{j-i}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ będzie macierzą Toeplitza, która nie jest macierzą skalarną, $n \geq 2$. Jeżeli $a_i a_{j-n} = a_{i-n} a_j$ dla $i, j = 1, \ldots, n-1$, to A^k jest macierzą Toeplitza gdzie $k \in \mathbb{Z}_+$.

Dowód. Niech $A = [a_{j-i}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ będzie macierzą Toeplitza. Niech $a_i a_{j-n} = a_{i-n} a_j$ dla $i, j = 1, \ldots, n-1$. Dla $k = 1$, $A^k = A$ jest macierzą Toeplitza. Załóżmy, że lemat jest prawdziwy dla pewnej liczby $(k-1) \in \mathbb{Z}_+$, czyli $A^{k-1} = [c_{j-i}]$ jest macierzą Toeplitza. Ponadto z lematu 3.7 wynika, że spełniony jest warunek $c_i a_{j-n} = c_{i-n} a_j$ dla $i, j = 1, \ldots, n-1$. Jeżeli pokażemy że lemat jest spełniony dla $k \in \mathbb{Z}_+$, to na mocy zasady indukcji matematycznej dowód będzie zakończony. Korzystając z tego że $A^k = A^{k-1}A$, z założenia indukcyjnego oraz z lematu 3.7 mnożenie dwóch macierzy Toeplitza spełniających warunek $a_i b_{j-n} = a_{i-n} b_j$ dla $i, j = 1, \ldots, n-1$ jest macierzą Toeplitza. Dowodzimy że A^k jest macierzą Toeplitza. ■

Przykład 3.9
Macierz $A = [a_{j-i}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ musi spełniać warunek $a_i a_{j-n} = a_{i-n} a_j$ dla $i, j = 1, \ldots, n-1$. Zatem macierz 4×4 musi spełniać układ warunków

$$\begin{aligned} a_1 a_{-2} &= a_{-3} a_2, \\ a_1 a_{-1} &= a_{-3} a_3, \\ a_2 a_{-1} &= a_{-2} a_3. \end{aligned}$$

Przykładowo, podana poniżej macierz A spełnia te warunki

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 12 & 4 & 5 & 2 \\ 8 & 12 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Istotnie

$$\begin{aligned} 2 \cdot 12 &= 8 \cdot 3, \\ 2 \cdot 4 &= 8 \cdot 1, \\ 3 \cdot 4 &= 12 \cdot 1. \end{aligned}$$

Zatem

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1193 & 790 & 597 & 395 \\ 1580 & 1193 & 790 & 597 \\ 2388 & 1580 & 1193 & 790 \\ 3160 & 2388 & 1580 & 1193 \end{bmatrix}$$

jest macierzą Toeplitza.

Lemat 3.10 ([3], Lemma 3)
Jeżeli $A = [a_{j-i}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ oraz A^2 są macierzami Toeplitza, które nie są skalarne, $n \geq 2$ to $a_i a_{j-n} = a_{i-n} a_j$ dla $i, j = 1, \ldots, n-1$.

Dowód. Niech $A = [a_{j-i}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ oraz $A^2 = [c_{j-i}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ będą macierzami Toeplitza dla $n \geq 2$. Wtedy dla $r = 1, 2, \ldots, n-2$ elementy na r–górnodiagonalnej przekątnej macierzy A^2 są postaci

$$c_{1,1+r} = \sum_{q=0}^{n-1} a_q b_{r-q} = \sum_{q=-1}^{n-2} a_q b_{r-q} = \ldots = \sum_{q=r-n+1}^{r} a_q b_{r-q} = c_{n-r,n}.$$

Z toeplitzowości macierzy A^2 wynika że powyższe sumy są równe. Podobnie elementy na $(n-r)$–dolnodiagonalnej przekątnej macierzy A^2 są równe ponieważ

$$c_{n-r+1,1} = \sum_{q=r-n}^{r-1} a_q b_{r-n-q} = \sum_{q=r-n-1}^{r-2} a_q b_{r-n-q} = \ldots = \sum_{q=1-n}^{0} a_q b_{r-n-q} = c_{n,r}.$$

Również elementy na głównej przekątnej macierzy A^2 są równe

$$c_0 = \sum_{q=0}^{n-1} a_q a_{-q} = \sum_{q=-1}^{n-2} a_q a_{-q} = \ldots = \sum_{q=1-n}^{0} a_q a_{-q}.$$

Porównując obie strony każdej równości otrzymujemy $(n-1)^2$ równości $a_i a_{j-n} = a_{i-n} a_j$ dla $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$. ■

Łącząc lematy 3.7-3.10 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.11 ([3], Theorem 4)
Niech $A = [a_{j-i}] \in \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{C})$ *będzie macierzą Toeplitza, która nie jest skalarna,* $n \geq 2$. *Macierz* A^k *jest macierzą Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy* $a_i a_{j-n} = a_{i-n} a_j$ *dla* $i, j = 1, \ldots, n-1$ *gdzie* $k \in \mathbb{Z}_+$.

Przykład 3.12
Na koniec pokażemy kilka przykładów macierzy i ich potęg.

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 30 & 34 \\ 17 & 14 & 30 \\ 15 & 17 & 14 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 68910 & 87816 & 109812 \\ 54906 & 68910 & 87816 \\ 43908 & 54906 & 68910 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 8 & 5 \end{bmatrix}, \quad B^4 = \begin{bmatrix} 19291 & 16284 & 13998 & 11592 \\ 23184 & 19291 & 16284 & 13998 \\ 27996 & 23184 & 19291 & 16284 \\ 32558 & 27996 & 23184 & 19291 \end{bmatrix}.$$

References

[1] R. M. Gray, *Teoplitz and circulant matrices: a review*, Print version of Foundations and Trends in Communications and Information Theory Vol. 2, No. 3 (2005), Zbl 1115.15021.

[2] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*,Cambridge University Press, Cambridge, 1985. MR 2978290, Zbl 1267.15001.

[3] H. Wu, *On Positive Integer Powers of Toeplitz Matrices*, Journal of Mathematics Research 4 (2013), 52-57.

[1]*Instytut Matematyki*
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków
E-mail: zborowska.anna1995@wp.pl

Przysłano: 30.06.2017; publikacja on-line: 30.01.2018.