Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 4 (2017), 1–11

Prace Koła Matematyków
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2017)

Magdalena Gwóźdź[1]

Afiniczna klasyfikacja rzeczywistych krzywych wielomianowych stopnia trzeciego o dwóch punktach w nieskończoności[2]

Streszczenie. W artykule przedstawiono afiniczną klasyfikację rzeczywistych krzywych wielomianowych stopnia trzeciego o dwóch punktach w nieskończoności. Wypełnia ona luki w analogicznej klasyfikacji zaproponowanej przez Weinberga w [1].

Abstract. We present an affine classification of real cubics with two points at infinity. The obtained result fills the gaps in the classification proposed by Weinberg in [1].

1. Wstęp

Celem pracy jest znalezienie afinicznej klasyfikacji rzeczywistych krzywych wielomianowych stopnia trzeciego, czyli krzywych opisanych równaniami $f(x,y) = 0$, gdzie:

$$f(x,y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + J$$

jest wielomianem trzeciego stopnia. Dwie krzywe $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ nazwiemy afinicznie równoważnymi, gdy istnieje takie nieosobliwe odwzorowanie afiniczne płaszczyzny $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, że wielomian $f \circ T$ jest z dokładnością do stałej równy wielomianowi g. W naszych rozważaniach ograniczymy się do krzywych o dwóch punktach w nieskończoności. Są to krzywe, w których suma jednomianów stopnia trzeciego jest iloczynem $l_1^2 \cdot l_2$, gdzie l_1 oraz l_2 są względnie pierwszymi wielomianami stopnia pierwszego.

Główne twierdzenie pracy przedstawia postacie kanoniczne takich krzywych, czyli taką rodzinę krzywych, że każda krzywa trzeciego stopnia o dwóch punktach

AMS (2010) Subject Classification: 53A04, 51N99, 14N99, 51N35, 58C27.
Słowa kluczowe: krzywa stopnia trzeciego, afiniczna klasyfikacja krzywych.
[2] Affine classification of real cubics with two points at infinity

w nieskończoności jest równoważna afinicznie pewnej krzywej z rodziny i spełniającą dodatkowy warunek, że żadne dwie krzywe z tej rodziny nie są afinicznie równoważne.

Praca oparta jest na artykule Weinberga [1]. Autor podał pełną klasyfikację krzywych stopnia trzeciego przedstawioną w tabeli na stronie 657. Tabela uwzględnia odpowiednio trzy punkty w nieskończoności (dwa warianty), następnie dwa punkty w nieskończoności i jeden punkt w nieskończoności. Autor podał szczegółowe obliczenia tylko dla jednego punktu w nieskończoności, stwierdzając na stronie 659, że obliczenia w pozostałych przypadkach są w tym samym duchu. W naszym artykule zajmujemy się krzywymi o dwóch punktach w nieskończoności. Wyniki obliczeń sugerują, że fragment klasyfikacji Weinberga obejmujący interesujący nas przypadek jest niepełny. Nie uwzględniono w nim niektórych postaci kanonicznych.

Klasyfikacja krzywych trzeciego stopnia o dwóch punktach w nieskończoności jest też tematem pracy [2]. Autorzy, stosując zupełnie inne podejście niż w [1], znajdują listę postaci kanonicznych. Założenie o dwóch punktach w nieskończoności nie jest podane *explicite*. W końcowym rozdziale pracy sprawdzimy, że również ich lista jest niepełna. Co więcej niektóre z tych postaci są afinicznie równoważne.

Klasyfikacja krzywych stopnia trzeciego została zapoczątkowana przez Newtona. Znalazł on 72 typy krzywych. Obecnie klasyfikacja krzywych stopnia trzeciego posiada od 57 do 219 typów, w zależności od kryterium względem którego klasyfikujemy.

2. Pojęcia wstępne

W tym rozdziale przedstawimy definicję krzywych trzeciego stopnia, powiemy, co rozumiemy przez krzywą o dwóch punktach w nieskończoności oraz sprecyzujemy pojęcie afinicznej równoważności krzywych.

Definicja 2.1
Przez *krzywą stopnia trzeciego* będziemy rozumieć krzywą na płaszczyźnie rzeczywistej zadaną równaniem wielomianowym $f(x, y) = 0$ trzeciego stopnia.

Definicja 2.2
Powiemy, że krzywa stopnia trzeciego $f(x, y) = 0$ *ma dwa punkty w nieskończoności*, gdy suma jednomianów stopnia trzeciego występujących w $f(x, y)$ jest postaci $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = l_1^2 \cdot l_2$, gdzie $l_1 = ax + by$ i $l_2 = cx + dy$ oraz $ad - bc \neq 0$.

Definicja 2.3
Odwzorowanie $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ postaci $T(x, y) = (\lambda_1 x+\lambda_2 y+\lambda_3, \lambda_4 x+\lambda_5 y+\lambda_6)$, gdzie λ_i dla $i = 1, \dots, 6$ są stałymi, takimi, że $\lambda_1\lambda_5 - \lambda_2\lambda_4 \neq 0$ nazywamy *nieosobliwym odwzorowaniem afinicznym*.

Definicja 2.4
Powiemy, że krzywe $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ są *afinicznie równoważne*, gdy $g(x, y) = \mu \cdot (f \circ T)(x, y)$ dla pewnego nieosobliwego odwzorowania afinicznego $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oraz pewnej stałej $\mu \neq 0$.

3. Afiniczna klasyfikacja krzywych

W tym rozdziale jest zaprezentowana klasyfikacja krzywych stopnia 3 wzorowana na artykule Weinberga (strona 657, przypadek trzeci).

Twierdzenie 3.1
Dowolna krzywa trzeciego stopnia o dwóch punktach w nieskończoności jest afinicznie równoważna jednej z następujących krzywych:

$$x^2y + y^2 + x + Iy + J = 0, \qquad -\infty < I < +\infty,\ -\infty < J < +\infty, \tag{3.1}$$

$$x^2y + y^2 + Iy + J = 0, \qquad I \in \{-1, 1\},\ -\infty < J < +\infty, \tag{3.2}$$

$$x^2y + y^2 + J = 0, \qquad J \in \{-1, 0, 1\}, \tag{3.3}$$

$$x^2y + x + Iy + J = 0, \qquad I \in \{-1, 1\},\ J \geqslant 0, \tag{3.4}$$

$$x^2y + x + J = 0, \qquad J \in \{0, 1\}, \tag{3.5}$$

$$x^2y + Iy + J = 0, \qquad I \in \{-1, 0, 1\},\ J \in \{0, 1\}. \tag{3.6}$$

Ponadto żadne dwie różne krzywe z powyższej listy nie są afinicznie równoważne.

Najbliższe trzy rozdziały poświęcone są dowodowi tego twierdzenia.

4. Wstępna redukcja równania krzywej

W tym rozdziale, stosując podstawienia afiniczne, sprowadzimy równanie krzywej stopnia trzeciego o dwóch punktach w nieskończoności,

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + J = 0 \tag{4.1}$$

do postaci

$$x^2y + Gy^2 + Hx + Iy + J = 0. \tag{4.2}$$

Na końcu rozdziału opiszemy rodzinę podstawień afinicznych, która zachowuje postać (4.2).

Na podstawie założenia, że krzywa (4.1) ma dwa punkty w nieskończoności, zachodzi równość $Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3 = l_1^2 l_2$, gdzie $l_1 = ax+by$, $l_2 = cx+dy$ są liniowo niezależnymi wielomianami stopnia pierwszego. Rozważmy odwzorowanie afiniczne $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ określone wzorem $G(x, y) = (ax+by, cx+dy)$. Niech T będzie odwzorowaniem afinicznym odwrotnym do G. Jeśli $f(x, y)$ jest lewą stroną równania (4.1), to $f \circ T = x^2y +$ wyrazy niższych stopni. W ten sposób sprowadziliśmy równanie (4.1) do postaci:

$$x^2y + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + J = 0 \tag{4.3}$$

Następnie wyzerujemy współczynniki przy x^2 oraz xy. Użyjemy w tym celu podstawienia $T(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}F, y - E\right)$.

Dowód. Po podstawieniu $x - \frac{1}{2}F$ w miejsce x i $y - E$ w miejsce y w równaniu (4.3) otrzymujemy

$$x^2y+Gy^2+(-FE+H)x+(-\frac{1}{4}F^2-2GE+I)y+(J-EI+\frac{1}{2}F^2E+E^2G-\frac{1}{2}FH) = 0$$

■

Jak widać, udało się wyzerować współczynniki stojące przy x^2 oraz xy.

Twierdzenie 4.1
Jeśli $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ są równaniami krzywych postaci (4.2) oraz $g(x, y) = \mu f(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3, \lambda_4 x + \lambda_5 y + \lambda_6)$, to $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_6 = 0$.

Dowód. Najpierw udowodnimy, że $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$. Rozpatrujemy w tym celu wyrazy stopnia trzeciego w wielomianie $\mu^{-1} \cdot g(x, y)$. Wówczas $\mu^{-1} \cdot g(x, y) = (\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3)^2(\lambda_4 x + \lambda_5 y + \lambda_6) +$ wyrazy stopnia mniejszego niż trzy $=$ $\lambda_1^2\lambda_4 x^3 + (2\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_5)\lambda_1 x^2 y + (\lambda_2^2\lambda_4 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_5)xy^2 + \lambda_2^2\lambda_5 y^3 +$ wyrazy stopnia mniejszego niż trzy. Zatem otrzymujemy następujące warunki na współczynniki przy x^3, x^2y oraz y^3:

$$\lambda_1^2\lambda_4 = 0 \tag{4.4}$$

$$\lambda_1(2\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_5) \neq 0 \tag{4.5}$$

$$\lambda_2^2\lambda_5 = 0 \tag{4.6}$$

Z równania (4.5) otrzymujemy, że $\lambda_1 \neq 0$, a więc z równania (4.4) dostajemy $\lambda_4 = 0$. Podstawiając $\lambda_4 = 0$ do równania (4.5) stwierdzamy, że $\lambda_5 \neq 0$. Natomiast z równania (4.6) otrzymujemy $\lambda_2 = 0$.

Teraz udowodnimy zerowanie kolejnych współczynników. Ponieważ $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$, więc $\mu^{-1} \cdot g(x, y) = f(\lambda_1 x + \lambda_3, \lambda_5 y + \lambda_6) = \lambda_1^2\lambda_6 x^2 + \lambda_1^2\lambda_5 x^2 y + 2\lambda_3\lambda_1\lambda_5 xy + G\lambda_5^2 y^2 +$ wyrazy stopnia mniejszego. W wielomianie tym współczynnik przy x^2 równa się zero, a więc $\lambda_6 = 0$, współczynnik przy xy się zeruje, a ponieważ $\lambda_1\lambda_5 \neq 0$, więc $\lambda_3 = 0$. ■

Wniosek 4.2
Krzywe $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ postaci (4.2) są afinicznie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją niezerowe stałe a, b, c takie, że $g(x, y) = cf(ax, by)$.

Wniosek 4.3
Jeśli krzywe $f(x, y) = x^2y + Gy^2 + Hx + Iy + J = 0$ oraz $g(x, y) = x^2y + G'y^2 + H'x + I'y + J' = 0$ są afinicznie równoważne oraz współczynnik przy pewnym jednomianie w $f(x, y)$ jest różny od zera, to współczynnik przy tym jednomianie w $g(x, y)$ też jest niezerowy.

Dowód. Na podstawie Wniosku 4.2 mamy $g(x, y) = cf(ax, by)$ dla pewnych niezerowych stałych a, b, c, czyli

$$x^2y + G'y^2 + H'x + I'y + J' = ca^2bx^2y + cb^2Gy^2 + caHx + cbIy + cJ.$$

Zatem współczynniki z prawej strony równania nie są zerowe, wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im współczynniki z lewej strony równania są też niezerowe. ■

Rozpatrzmy teraz współczynnik G w równaniu (4.2).

Jeśli $G \neq 0$, to przyjmując $a = G$, $b = G$ i $c = G^{-3}$ oraz stosując Wniosek 4.2, sprowadzamy równanie (4.2) do postaci $x^2y + y^2 + Hx + Iy + J = 0$.

Zatem każda krzywa stopnia trzeciego o dwóch punktach w nieskończoności jest afinicznie równoważna jednej z następujących krzywych:

$$x^2y + y^2 + Hx + Iy + J = 0, \tag{4.7}$$

$$x^2y + Hx + Iy + J = 0. \tag{4.8}$$

W następnym rozdziale zajmiemy się przypadkiem pierwszym, a więc postacią kanoniczną krzywej (4.7), a w kolejnym rozdziale krzywą (4.8).

5. Postacie kanoniczne w przypadku (4.7)

W tym rozdziale poszukiwać będziemy postaci kanonicznych dla krzywych postaci

$$x^2y + y^2 + Hx + Iy + J = 0.$$

Naszym narzędziem będzie następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.1
Krzywe

$$f(x, y) = x^2y + y^2 + Hx + Iy + J = 0 \tag{5.1}$$

$$g(x, y) = x^2y + y^2 + H'x + I'y + J' = 0 \tag{5.2}$$

są afinicznie równoważne, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka stała $a \neq 0$, że:

$$x^2y + y^2 + H'x + I'y + J' = x^2y + y^2 + \frac{H}{a^3}x + \frac{I}{a^2}y + \frac{J}{a^4}. \tag{5.3}$$

Dowód. Na podstawie Wniosku 4.2 istnieją takie stałe $a, b, c \neq 0$, że $g(x, y) = cf(ax, by) = ca^2bx^2y + cb^2y^2 +$ wyrazy niższych stopni. Porównanie współczynników przy x^2y oraz y^2 daje $a^2cb = 1$ oraz $cb^2 = 1$. Znając te zależności, otrzymujemy $b = a^2$, $c = a^{-4}$. Stąd dostajemy równość $g(x, y) = a^{-4} \cdot f(ax, a^2y)$. Dowód implikacji odwrotnej jest analogiczny. ■

Przystępujemy do dalszej redukcji równania krzywej $x^2y+y^2+Hx+Iy+J = 0$.

Jeśli $H \neq 0$, to przyjmując $a = H^{\frac{1}{3}}$ i korzystając z Twierdzenia 5.1, sprowadzamy współczynnik H do 1. Korzystając ponownie z Twierdzenia 5.1, stwierdzamy, że jeśli krzywe $f(x, y) = 0$ i $g(x, y) = 0$, w których $H = H' = 1$, są afinicznie równoważne, to $a = 1$, a więc $I = I'$ oraz $J = J'$. Doprowadziliśmy w ten sposób krzywą do postaci kanonicznej:

$$x^2y + y^2 + x + Iy + J = 0 \qquad -\infty < I < +\infty,\ -\infty < J < +\infty. \tag{5.4}$$

Rozważmy teraz przypadek $H = 0$. Jeśli krzywe $x^2y + y^2 + Iy + J = 0$ oraz $x^2y + y^2 + I'y + J' = 0$ są afinicznie równoważne, to na podstawie Twierdzenia 5.1

mamy $I' = \frac{I}{a^2}$, więc I oraz I' są tego samego znaku. Jeśli $I \neq 0$, to przyjmując $a = \sqrt{|I|}$ otrzymujemy, że $I' = 1$ lub $I' = -1$.

Jeśli $I = I' = 1$ lub $I = I' = -1$ i krzywe (5.1) i (5.2) są afinicznie równoważne, to $a^2 = 1$. Wtedy $J' = \frac{J}{a^4} = J$, co doprowadziło nas do kolejnej postaci kanonicznej:

$$x^2y + y^2 + Iy + J = 0, \qquad I \in \{-1, 1\},\ -\infty < J < +\infty.$$

Rozważmy teraz przypadek, kiedy $H = H' = I = I' = 0$. Jeśli $x^2y + y^2 + J = 0$ oraz $x^2y + y^2 + J' = 0$ są afinicznie równoważne, to na podstawie Twierdzenia 5.1 stwierdzamy, że $J' = \frac{J}{a^4}$, więc J oraz J' są tego samego znaku. Jeśli $J \neq 0$, to przyjmując $a = |J|^{\frac{1}{4}}$, otrzymujemy, że $J' = 1$ lub $J' = -1$. Dochodzimy do następujących postaci kanonicznych:

$$x^2y + y^2 + J = 0, \qquad J \in \{-1, 0, 1\}.$$

Podsumowując dotychczasowe rozważania, stwierdzamy, że sprowadziliśmy krzywą (4.7) do jednej z postaci kanonicznych (3.1), (3.2), (3.3) z Twierdzenia 3.1. Pokazaliśmy także, że żadne dwie różne postacie kanoniczne nie są afinicznie równoważne.

6. Postacie kanoniczne w przypadku (4.8)

Poszukiwanie postaci kanonicznej dla krzywej

$$x^2y + Hx + Iy + J = 0$$

oprzemy na następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 6.1
Krzywe

$$f(x,y) = x^2y + Hx + Iy + J = 0 \tag{6.1}$$

$$g(x,y) = x^2y + H'x + I'y + J' = 0 \tag{6.2}$$

są afinicznie równoważne, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją stałe $a \neq 0$, $b \neq 0$ takie, że:

$$x^2y + H'x + I'y + J' = x^2y + \frac{H}{ab}x + \frac{I}{a^2}y + \frac{J}{a^2b}.$$

Dowód. Na podstawie Wniosku 4.2 istnieją stałe $a, b, c \neq 0$ takie, że $g(x,y) = cf(ax, by)$ więc $x^2y + H'x + I'y + J' = ca^2bx^2y + caHx + bIy + J$.

Porównując współczynniki przy x^2y, otrzymujemy: $ca^2b = 1$. Stąd otrzymujemy równość $g(x,y) = \frac{1}{a^2b}f(ax, by)$, która daje tezę twierdzenia. ∎

Przystępujemy do dalszej redukcji równania krzywej $x^2y + Hx + Iy + J = 0$.

Najpierw zajmiemy się przypadkiem $H \neq 0$. Jeżeli $I \neq 0$, to przyjmując $a = \varepsilon\sqrt{|I|}$ ($\varepsilon = -1$ lub $\varepsilon = 1$), $b = \varepsilon H/\sqrt{|I|}$, otrzymamy postać kanoniczną

$$x^2y + x + Iy + J = 0,\ I \in \{-1, 1\},\ J \geqslant 0.$$

Nierówność $J \geqslant 0$ zapewnimy sobie przez swobodny dobór $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Jeżeli $I = 0$ oraz $J \neq 0$, to przyjmując $a = J/H$, $b = H^2/J$, otrzymamy postać $x^2y + x + 1 = 0$. Dla $J = 0$ mamy swobodę[3]; przyjmując $a = H, b = 1$ dostaniemy $x^2y + x = 0$. Otrzymujemy w ten sposób następującą postać kanoniczną:

$$x^2y + x + J = 0, \;\; J \in \{0, 1\}.$$

Następnie rozpatrzmy przypadek $H = 0$. Jeśli krzywe $x^2y + Iy + J = 0$ i $x^2y + I'y + J' = 0$ są afinicznie równoważne, to na podstawie Twierdzenia 6.1 otrzymujemy, że $I' = \frac{I}{a^2}$. Zatem I oraz I' są tego samego znaku. Jeśli $I \neq 0$, to biorąc $a = \sqrt{|I|}$, otrzymujemy $I' = 1$ lub $I' = -1$. Jeśli $J \neq 0$, to przyjmując $b = J/|I|$, otrzymujemy postać $x^2y \pm y + 1 = 0$. Jeżeli $J = 0$, to dla dowolnego $b \neq 0$ otrzymamy $x^2y \pm y = 0$. Dochodzimy w ten sposób do kolejnej postaci kanonicznej:

$$x^2y + Iy + J = 0, \qquad I \in \{-1, 1\}, \; J \in \{0, 1\}.$$

Jeśli $I = 0$, to naśladując powyższe rozumowanie, dochodzimy do postaci kanonicznej:

$$x^2y + J = 0, \qquad J \in \{0, 1\}.$$

Podsumowując dotychczasowe rozważania, stwierdzamy, że sprowadziliśmy krzywą (4.8) do jednej z postaci kanonicznych (3.4), (3.5) lub (3.6) z Twierdzenia 3.1. Łatwo wnioskujemy, że żadne dwie różne postacie kanoniczne nie są afinicznie równoważne.

7. Luki w znanych klasyfikacjach

W artykule [2] zaproponowano następującą klasyfikację krzywych stopnia trzeciego. Dotyczy ona krzywych o dwóch punktach w nieskończoności, czego jednak autorzy nie podkreślają.

Twierdzenie 7.1 ([2], Theorem 8)
Dowolna krzywa trzeciego stopnia (o dwóch punktach w nieskończoności) jest afinicznie równoważna jednej z następujących krzywych:

$$x^3 + x^2y = y^2 + ax + c, \quad a \geq 2 \tag{7.1}$$

$$x^3 + x^2y = y^2 + ax - 3y + c, \quad a \in \{-2, 0\} \tag{7.2}$$

$$x^3 + x^2y = y^2 - x - 3y + c, \quad c \in \{1, 2, 3\} \tag{7.3}$$

$$x^3 + x^2y = ax + 1, \quad a \in \{-1, 1\} \tag{7.4}$$

$$x^3 + x^2y = 1 \tag{7.5}$$

$$x^3 + x^2y = ax, \quad a \in \{-1, 1\} \tag{7.6}$$

$$x^3 + x^2y = 0. \tag{7.7}$$

[3]swoboda ta oznacza, że krzywa ma nietrywialny automorfizm afiniczny

W tym rozdziale pokażemy, posługując się Twierdzeniem 3.1, że lista krzywych z Twierdzenia 7.1 nie wyczerpuje wszystkich postaci kanonicznych.

Aby zbadać przypadki (7.1), (7.2), (7.3) użyjemy odwzorowania afinicznego $T(x,y) = (-x-1, x-y+2)$. To podstawienie sprowadza dowolny wielomian $f(x,y) = -(x^3+x^2y)+y^2+ax+by+c$ do

$$f\circ T(x,y) = x^2y+y^2+(-a+b+2)x+(-b-3)y+c-a+2b+3.$$

Rozpatrzmy krzywą postaci (7.1), gdy $a>2$. Jeśli $f(x,y) = -x^3-x^2y+y^2+ax+c$, to

$$f\circ T(x,y) = x^2y+y^2+(-a+2)x-3y+c-a+3.$$

Na podstawie Twierdzenia 5.1 krzywa $f\circ T=0$ jest afinicznie równoważna krzywej

$$x^2y+y^2+x-\frac{3}{m^2}y+\frac{c-a+3}{m^4},$$

gdzie współczynnik przy jednomianie x wynosi $\frac{2-a}{m^3}=1$. Otrzymujemy postać kanoniczną

$$x^2y+y^2+x+Iy+J,$$

w której $I=-\frac{3}{m^2}$ oraz $J=\frac{c-a+3}{m^4}$.

Dla ustalonych współczynników a,c spełniających warunek $a>2$ układ równań $m^3=2-a$, $I=-\frac{3}{m^2}$, $J=\frac{c-a+3}{m^4}$ posiada jednoznaczne rozwiązanie. Z drugiego równania wynika, że $I<0$. Na odwrót, dla dowolnych współczynników $I<0$, $-\infty<J<+\infty$ powyższy układ równań posiada jednoznaczne rozwiązanie, w którym $a>2$. Uzyskujemy w ten sposób wszystkie postacie kanoniczne (3.1) spełniające warunki $I<0$, $-\infty<J<+\infty$.

Rozważmy krzywą z przypadku (7.1) dla $a=2$. Wtedy krzywa $f\circ T=0$ ma postać

$$x^2y+y^2-3y+c+1=0.$$

Jest ona afinicznie równoważna krzywej

$$x^2y+y^2-y+\frac{c+1}{9}=0.$$

Zatem różne wartości parametru c prowadzą do różnych postaci kanonicznych (3.2), ale tylko dla $I=-1$.

Rozważmy krzywą z przypadku (7.2). Wówczas

$$f\circ T(x,y) = x^2y+y^2+(-a-1)x+c-a-3, \quad a\in\{-2,0\}.$$

Jeśli $a=-2$, to korzystając z Twierdzenia 5.1, uzyskujemy, że krzywa $f\circ T=0$ jest afinicznie równoważna krzywej

$$x^2y+y^2+x+c-1=0. \tag{7.8}$$

Jeśli $a=0$, to krzywa $f\circ T=0$ jest afinicznie równoważna krzywej

$$x^2y+y^2+x+c-3=0. \tag{7.9}$$

Równania (7.8) i (7.9) jest to postać kanoniczna (3.1) z $I = 0$. Zatem postacie (7.2) dla $a = 0$ i dla $a = -2$ pokrywają się.

Rozważmy krzywą z przypadku (7.3). Wówczas

$$f \circ T(x, y) = x^2y + y^2 + c - 2, \quad c \in \{1, 2, 3\}.$$

Dla $c = 1$ dostajemy

$$x^2y + y^2 - 1 = 0. \tag{7.10}$$

Dla $c = 2$ dostajemy

$$x^2y + y^2 = 0. \tag{7.11}$$

Dla $c = 3$ dostajemy

$$x^2y + y^2 + 1 = 0. \tag{7.12}$$

Powyższe trzy przypadki sprowadzają się do postaci (3.3).

Następne przypadki będziemy rozważać korzystając z podstawienia afinicznego postaci: $T(x, y) = (-x, x + y)$.

Będziemy teraz zajmować się równaniem (7.4). Po przekształceniu otrzymujemy:

$$-(x^3 + x^2y) + ax + 1 = 0, \quad a \in \{-1, 1\}.$$

Po zastosowaniu powyższego podstawienia otrzymujemy następujące równania krzywych:

$$x^2y + x - 1 = 0,$$
$$x^2y - x - 1 = 0.$$

Oba równania sprowadzamy do postaci

$$x^2y + x + 1 = 0$$

(Pierwsze za pomocą $T(x, y) = (-x, -y)$, drugie przez $T(x, y) = (x, -y)$).

Krzywa postaci (7.4) dla $a = -1$ oraz $a = 1$ sprowadzają się do tej samej postaci kanonicznej, zatem przypadek $a = -1$ lub $a = 1$ można pominąć. Otrzymaliśmy więc postać kanoniczną (3.5) dla $J = 1$.

Rozważmy teraz krzywą z przypadku (7.5). Po zastosowaniu podstawienia afinicznego $T(x, y) = (-x, x + y)$ otrzymujemy równanie:

$$x^2y - 1 = 0.$$

Po podstawieniu $T(x, y) = (x, -y)$, i pomnożeniu przez $\mu = -1$ dochodzimy do:

$$x^2y + 1 = 0.$$

Otrzymaliśmy zatem postać kanoniczną (3.6) dla $I = 0$ i $J = 1$.

Rozważmy teraz krzywą z przypadku (7.6):

$$x^3 + x^2y = ax, \quad a \in \{-1, 1\}.$$

Podstawienie afiniczne postaci: $T(x, y) = (-x, x + y)$ sprowadza równanie (7.6) do postaci:

$$x^2y + x = 0, \text{ gdy } a = -1,$$

$$x^2y + x = 0, \text{ gdy } a = 1.$$

Po zastosowaniu do drugiego równania podstawienia $T(x, y) = (x, -y)$ i pomnożeniu przez -1 dochodzimy do:

$$x^2y + x = 0.$$

Krzywa postaci (7.6) dla $a = -1$ oraz $a = 1$ sprowadzają się do tej samej postaci kanonicznej, zatem przypadek $a = -1$ lub $a = 1$ można pominąć. Otrzymaliśmy zatem postać kanoniczną (3.5) dla $J = 0$.

Rozważmy krzywą z przypadku (7.7):

$$x^3 + x^2y = 0.$$

Po zastosowaniu podstawienia, jak w przykładzie wyżej, co jest następującej postaci:

$$x^2y = 0.$$

Otrzymaliśmy zatem postać kanoniczną (3.6) dla $I = 0$ i $J = 0$.

Na podstawie powyższych rozważań zauważyliśmy, że nigdy nie otrzymamy z klasyfikacji przedstawionej w [2] postaci (3.1) dla $I > 0$ oraz postaci (3.2) dla $I = 1$, a także postaci (3.4) dla $I = -1$ lub $I = 1$ oraz (3.6) dla $I \in \{-1, 1\}, J \in \{0, 1\}$. Zatem ta klasyfikacja jest niepełna, a niektóre przypadki dają te same postacie kanoniczne ((7.2) daje to samo dla $a = -2$ i dla $a = 0$, (7.4) daje to samo dla $a = -1$ i dla $a = 1$, (7.6) daje to samo dla $a = -1$ i dla $a = 1$).

8. Luki klasyfikacji Weinberga

W artykule [1] Weinberg zaproponował następującą klasyfikację krzywych stopnia trzeciego o dwóch punktach w nieskończoności:

$$x^2y + y^2 - x + y + J = 0, \qquad -\infty < J < +\infty, \tag{8.1}$$

$$x^2y + y^2 - x + y + J = 0, \qquad -\infty < J < +\infty, \tag{8.2}$$

$$x^2y + y^2 + y + J = 0, \qquad -\infty < J < +\infty, \tag{8.3}$$

$$x^2y + y^2 - 1 = 0, \tag{8.4}$$

$$x^2y + y^2 = 0, \tag{8.5}$$

$$x^2y - x + y + J = 0, \qquad 0 \leq J < +\infty, \tag{8.6}$$

$$x^2y - x = 0, \tag{8.7}$$

$$x^2y - x + 1 = 0, \tag{8.8}$$

$$x^2y + y = 0, \tag{8.9}$$

$$x^2y + y + 1 = 0, \tag{8.10}$$

$$x^2y = 0, \tag{8.11}$$

$$x^2y - 1 = 0. \tag{8.12}$$

Pokażemy, że powyższa klasyfikacja również nie jest pełna. Formuły (8.1) i (8.2) są identyczne. Podstawiając $T(x,y)=(-x,y)$ otrzymujemy postać (3.1) ale tylko dla $I=1$, czyli brakuje przypadków $I<1$ oraz $I>1$.

Porównując postacie kanoniczne (8.3) i (3.2), stwierdzamy, że Weinberg zgubił przypadek

$$x^2y+y^2-y+J=0, \qquad -\infty<J<+\infty.$$

Porównując postacie kanoniczne (8.5) i (8.4) z postacią (3.3), stwierdzamy, że Weinberg zgubił przypadek

$$x^2y+y^2+1=0.$$

Porównując postać kanoniczną (8.6) z postacią (3.4), stwierdzamy, że Weinberg zgubił przypadek

$$x^2y+x-y+J=0,\ \ J\geqslant 0.$$

Krzywe (8.7) i (8.8) to krzywa (3.5) z Twierdzenia 3.1.

Porównując postacie kanoniczne (8.9), (8.10), (8.11) i (8.12) z postacią (3.6), stwierdzamy, że Weinberg zgubił przypadek

$$x^2y-y+J=0,\ \ J\in\{0,1\}.$$

Podsumowując dotychczasowe rozważania, stwierdzamy, że klasyfikacja Weinberga nie obejmuje następujących przypadków:

$$\begin{gathered}
x^2y+y^2+x+Iy+J=0, \qquad I\neq 0,\ -\infty<J<+\infty,\\
x^2y+y^2-y+J=0, \qquad -\infty<J<+\infty,\\
x^2y+y^2+1=0, \qquad J\geqslant 0,\\
x^2y-y+J=0, \qquad J\in\{0,1\}
\end{gathered}$$

Postacie (8.1) i (8.2) są identyczne.

Literatura

[1] D. A. Weinberg, *The affine classification of cubic curves*, Rocky Mountain J. Math. 18(1988), no. 3, 655–664, MR 972656, Zbl 0668.14021.

[2] M. Nadjafikah, A.–R. Forough, *Classification of cubics up to affine transformations*, Differ. Geom. Dyn. Syst. 8(2006), 184–195, MR 2220723, Zbl 1161.53301.

[1] *Instytut Matematyki*
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków
E-mail: magdalenajustynagwozdz@gmail.com

Przysłano: 1.12.2016; publikacja on-line: 12.07.2017.