Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 4 (2017), 13-19

Prace Koła Matematyków
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2017)

Anna Wicher[1]

Tranzytywność i refleksywność operatorów C–symetrycznych[2]

Streszczenie. W niniejszej pracy rozważa się zagadnienia dotyczące refleksywności i tranzytywności podprzestrzeni operatorów C–symetrycznych na przestrzeni $\mathbb{C}^n$. W szczególności problemy te przedstawione są w języku preanihilatorów.

Abstract. In this paper we study reflexivity and trasitivity of C–symmetric operators in $\mathbb{C}^n$. In particular we concentrate on preanihilators of the spaces of C–symmetric operators.

1. Wstęp

Połączenie pojęć refleksywności i tranzytywności z operatorami C–symetrycznymi wydaje się być niezwykle ciekawe. Pojawiło się ono w pracy [3]. Jeśli $\mathbb{C}^n$ jest przestrzenią Hilberta o wymiarze n, to operator A jest C–symetryczny w zadanej inwolucji $C\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ wtedy, gdy spełnia

$$CAC = A^*,$$

gdzie przez A^* rozumiemy sprzężenie hermitowskie operatora. Celem artykułu jest sformułowanie wniosku dotyczącego refleksywności operatorów C–symetrycznych z zadaną inwolucją kanoniczną w przestrzeni $\mathbb{C}^n$.

2. Podstawowe definicje i zależności

Przez $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ rozumiemy *przestrzeń operatorów liniowych* nad $\mathbb{C}^n$, tzn.

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = \{T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : T \text{ - operator liniowy}\}.$$

AMS (2010) Subject Classification: 15A04.
Słowa kluczowe: C–symetria, refleksywność, tranzytywność.
[2] *Reflexivity and transitivity of C–symmetric operators*

Przestrzeń ta, z mnożeniem danym przez złożenie operatorów, tworzy algebrę nad $\mathbb{C}$.

Przywołajmy teraz znane twierdzenia.

Niech $M_n(\mathbb{C})$ będzie zbiorem wszystkich macierzy wymiaru $n \times n$ o wyrazach z ciała $\mathbb{C}$, tzn.

$$M_n(\mathbb{C}) = \{A_n = [a_{ij}] \colon a_{ij} \in \mathbb{C}, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Twierdzenie 2.1
Zbiór $M_n(\mathbb{C})$ jest nieprzemienną algebrą nad $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 2.2 ([6], s. 84)
Zbiór $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ niech będzie bazą ortonormalną w $\mathbb{C}^n$. Wtedy

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \simeq M_n(\mathbb{C})$$

jest izomorfizmem algebr. W szczególności dla $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ mamy

$$A \simeq [a_{kl}] = [\langle Ae_l, e_k\rangle]_{\substack{k=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots,n}} = \begin{bmatrix} \langle Ae_1, e_1\rangle & \langle Ae_2, e_1\rangle & \cdots & \langle Ae_n, e_1\rangle \\ \langle Ae_1, e_2\rangle & \langle Ae_2, e_2\rangle & & \langle Ae_n, e_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Ae_1, e_n\rangle & \langle Ae_2, e_n\rangle & \cdots & \langle Ae_n, e_n\rangle \end{bmatrix}.$$

Przypomnijmy, że jeśli $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ oraz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ jest macierzą operatora T, to *śladem* macierzy kwadratowej A nazywamy liczbę $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{C}$ będącą sumą elementów leżących na głównej przekątnej tej macierzy, tzn.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Ślad operatora liniowego $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ to ślad jego macierzy. Ponadto rząd operatora liniowego $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ to $\dim \operatorname{ran} T$, tzn. wymiar jego obrazu. *Rzędem* macierzy A nazywamy wymiar przestrzeni wektorowej rozpiętej na jej kolumnach.

Wygodne będzie następujące oznaczenie:

$$\mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k,$$

to znaczy, że przez $\mathcal{F}$ będziemy rozumieć zbiór operatorów o rzędzie skończonym. Symbol $\mathcal{F}_k$, dla $k \in \mathbb{Z}_+$, oznacza zbiór operatorów rzędu mniejszego lub równego k.

Definicja 2.3
Preanihilatorem przestrzeni $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ nazywamy przestrzeń $\mathcal{S}_\perp \subset \mathcal{F}$ taką, że

$$\mathcal{S}_\perp = \{T \in \mathcal{F} \colon \mathrm{tr}(AT) = 0, A \in \mathcal{S}\}.$$

3. Tranzytywność i refleksywność

Przykład 3.1
Niech $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ oraz $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$. Korzystając z liniowości śladu obliczamy preanihilator tej przestrzeni

$$\operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{bmatrix} = t_1 + t_4,$$

$$\operatorname{tr} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} t_3 & t_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = t_3$$

i otrzymujemy

$$\begin{cases} t_1 + t_4 = 0 \\ t_3 = 0. \end{cases}$$

Ostatecznie więc

$$\mathcal{S}_\perp = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ 0 & -t_1 \end{bmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Definicja 3.2
Niech $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ będzie podprzestrzenią liniową, $k \in \mathbb{Z}_+$. Wtedy

(1) $\mathcal{S}$ jest k*–refleksywne*, jeśli $\operatorname{lin}\{\mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k\} = \mathcal{S}_\perp$,

(2) $\mathcal{S}$ jest k*–tranzytywne*, jeśli $\mathcal{S}_\perp \cap \mathcal{F}_k = \{0\}$.

Gdy $k = 1$ mówimy, że przestrzeń jest *refleksywna* lub *tranzytywna*.

Przykład 3.3
Przykładem przestrzeni 2–refleksywnych oraz jednocześnie tranzytywnych jest przestrzeń macierzy cyklicznych $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_3$, tzn.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{bmatrix} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Wiemy, że

$$\mathcal{S} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Aby wyznaczyć preanihilator $\mathcal{S}_\perp$ tej przestrzeni należy, zgodnie z definicją, wyznaczyć taką macierz $T \in \mathcal{M}_3$, dla której $\operatorname{tr}(AT) = 0$ dla każdego generatora A przestrzeni $\mathcal{S}$. Mamy zatem

$$\mathcal{S}_\perp = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_5 & t_6 \\ -t_2 - t_6 & -t_3 - t_4 & -t_1 - t_5 \end{bmatrix} : t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 \in \mathbb{C} \right\},$$

lub inaczej

$$\mathcal{S}_\perp = \text{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Zauważmy, że wszystkie operatory generujące preanihilator $\mathcal{S}_\perp$ są rzędu 2. Wynika z tego, że w przestrzeni generowanej przez te operatory nie ma operatorów rzędu mniejszego niż 2. Ostatecznie więc przestrzeń $\mathcal{S}$ jest 2–refleksywna i tranzytywna.

4. Operatory C–symetryczne

Definicja 4.1
Inwolucją w $\mathbb{C}^n$ nazywamy operator $C\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ taki, że

1) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n \quad \langle x, y\rangle = \langle Cy, Cx\rangle$,

2) $C^2 = I$, gdzie I jest operatorem identycznościowym w $\mathbb{C}^n$,

3) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad C(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} C(x) + \bar{\beta} C(y)$.

Przywołajmy kilka przykładów inwolucji.

Przykład 4.2
Niech $C\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

(1) Odwzorowanie $C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ jest przykładem inwolucji,

(2) Odwzorowanie $C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}, \ldots, \bar{x}_2, \bar{x}_1)$ jest przykładem inwolucji i będziemy ją nazywać *inwolucją kanoniczną* ([3], Example 4).

Przed wprowadzeniem definicji operatora C–symetrycznego, przypomnijmy definicję operatora sprzężonego.

Definicja 4.3
Dla każdego operatora $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ istnieje operator sprzężony do A definiowany poprzez równość

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle, \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Zauważmy, że jeśli $A = [a_{ij}]$, to $A^* = [\bar{a}_{ji}]$.

Definicja 4.4 ([3], p. 1286)
Niech $C\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie inwolucją oraz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Mówimy, że operator A jest *C–symetryczny*, gdy

$$CAC = A^*.$$

Powyższy warunek równoważnie można zapisać następująco:

$$\langle Ax, Cy\rangle = \langle Ay, Cx\rangle, \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Przykład 4.5
Niech $C\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ będzie inwolucją kanoniczną w $\mathbb{C}^2$, tzn. $C(x_1, x_2) = (\bar{x}_2, \bar{x}_1)$ oraz niech będzie dany operator $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ wzorem $A(x_1, x_2) = (x_1 - ix_2, x_2)$ dla $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$. Zbiór $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ jest bazą kanoniczną w $\mathbb{C}^2$. Pokażemy, że operator A jest C–symetryczny względem inwolucji C. Zauważmy, że

$$CAC(x_1, x_2) = CA(\bar{x}_2, \bar{x}_1) = C(\bar{x}_2 - i\bar{x}_1, \bar{x}_1) = (x_1, x_2 + ix_1).$$

Z drugiej strony wiemy, że macierz operatora A to

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

więc

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Mamy więc

$$A^*(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ ix_1 + x_2 \end{bmatrix},$$

czyli równość $CAC = A^*$ z definicji operatora C-symetrycznego jest spełniona.

Twierdzenie 4.6
Niech $C\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie inwolucją kanoniczną, tzn. $C(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (\bar{z}_n, \ldots, \bar{z}_2, \bar{z}_1)$. Ponadto niech $A = [a_{ij}]$ oraz $F = \{e_i\}_{i \in \{1,2,\ldots,n\}}$ będzie bazą kanoniczną w $\mathbb{C}^n$. Wtedy

$$A \quad \textit{jest} \quad C\textit{–symetryczny} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = a_{n-j+1, n-i+1}, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Dowód. Niech $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zauważmy, że

$$Ce_i = e_{n-i+1}.$$

Korzystając z definicji operatora C–symetrycznego oraz własności inwolucji możemy zapisać przekształcenia

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \langle Ae_j, e_i \rangle = \langle Ce_i, CAe_j \rangle = \langle Ce_i, A^*Ce_j \rangle = \langle ACe_i, Ce_j \rangle \\ &= \langle Ae_{n-i+1}, e_{n-j+1} \rangle = a_{n-j+1, n-i+1}. \end{aligned}$$

Równoważność powyższych przekształceń kończy dowód. ∎

O tranzytywności i refleksywności operatorów C–symetrycznych możemy przeczytać m. in. w artykule [4]. Szczególnym przypadkiem przedstawionych tam rozumowań jest następujące twierdzenie. W niniejszym artykule zostanie ono podane bez dowodu. Przez $\mathcal{H}$ będziemy rozumieli przestrzeń Hilberta.

Twierdzenie 4.7 ([4], Theorem 2.1, Theorem 4.1)
Niech $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \{T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H} : T$ - operator liniowy ograniczony$\}$. *Niech $C\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ będzie dowolną inwolucją w $\mathcal{H}$. Niech $\mathcal{C}$ oznacza zbiór operatorów C–symetrycznych w $\mathcal{H}$, tzn.*

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\colon CAC = A^*\}.$$

Wtedy:

(1) Podprzestrzeń $\mathcal{C}$ jest tranzytywna,

(2) Przestrzeń $\mathcal{C}$ jest 2–refleksywna.

Poniżej rozważymy jeden ze szczególnych przypadków powyższego twierdzenia. W tym celu przestrzenią Hilberta będzie przestrzeń $\mathbb{C}^n$ oraz zadana w niej inwolucja kanoniczna.

Wniosek 4.8
Niech C będzie inwolucją kanoniczną w $\mathbb{C}^n$, tzn. $C(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (\bar{z}_n, \bar{z}_{n-1}, \ldots, \bar{z}_1)$ dla $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ oraz niech $\mathcal{S}$ będzie przestrzenią operatorów C–symetrycznych. Wtedy przestrzeń $\mathcal{S}$ jest 2–refleksywna.

Dowód. Rozumowanie zostanie przeprowadzone na macierzach operatorów. Pokażemy, że preanihilator $\mathcal{S}_\perp$ przestrzeni $\mathcal{S}$ ma następującą postać

$$\mathcal{S}_\perp = \left\{ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} : b_{ij} = -b_{n-j+1,n-i+1}, \;\; b_{ii} = 0 \;\; dla \;\; i,j \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Przypomnijmy, że na podstawie Twierdzenia 4.6 przestrzeń $\mathcal{S}$ operatorów C–symetrycznych przedstawia się następująco

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : a_{ij} = a_{n-j+1,n-i+1}, \;\; i,j \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Zauważmy, że przestrzeń $\mathcal{S}$ generowana jest przez

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

operatorów. Tymi generatorami są macierze $A = [a_{kl}]$, w których

$$a_{kl} = 1 = a_{n-l+1,n-k+1}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, n$ oraz $l = 1, 2, \ldots, n-k+1$. Pozostałe elementy tych macierzy to zera. Zgodnie z definicją operatory generujące preanihilator otrzymujemy poprzez przyrównywanie do zera śladu iloczynu każdego generatora przestrzeni $\mathcal{S}$ i dowolnego operatora z $\mathcal{F}$. Przypomnijmy zatem, że wynikiem mnożenia dwóch macierzy kwadratowych $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ jest macierz $C = [c_{ij}]$, gdzie

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}, \quad i,j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Mnożąc macierz A_{kl}, zgodnie z definicją preanihilatora przez dowolną macierz kwadratową $B = [b_{ij}]$ dla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, otrzymujemy macierz $C = [c_{ij}]$ taką, że

$$c_{kj} = a_{kl} \cdot b_{lj} = 1 \cdot b_{lj} = b_{lj}.$$

Obliczając ślad macierzy C i przyrównując go do zera, sumujemy wyłącznie elementy na przekątnej głównej tej macierzy, tzn. gdy $j = k$. Dostajemy zatem

$$b_{lk} + b_{n-k+1,n-l+1} = 0,$$

czyli ostatecznie

$$b_{lk} = -b_{n-k+1,n-l+1}.$$

Preanihilator przestrzeni $\mathcal{S}$ jest więc generowany wyłącznie przez operatory rzędu maksymalnie 2. Fakt ten kończy dowód. ■

References

[1] E. A. Azoff, *On finite rank operators and preannihilators*, American Mathematical Society, Providence - Rhode Island - USA, 1986, MR 858467, Zbl 0606.47042.

[2] C. Câmara, J. Jurasik, K. Kliś-Garlicka, M. Ptak, *Characterizations of asymmetric truncated Toeplitz operators*, preprint arXiv:1607.03342v2.

[3] S. R. Garcia, M. Putinar, *Complex symmetric operators and applications*, Trans. Amer. Math. Soc., 358 (2006), 1285–1315, MR 2187654, Zbl 1087.30031.

[4] K. Kliś-Garlicka, M. Ptak, *C-symmetric operators and reflexivity*, Oper. Matrices 9, 1 (2015), 225–232, MR 3338561, Zbl 06442860.

[5] M. Ptak, *Invariant subspaces, reflexivity, hyperreflexivity*, Prace Koła Mat. Uniw. Pedag. w Krak. 3 (2016), 25–41.

[6] A. Sołtysiak, *Algebra liniowa. Wykłady dla studentów fizyki*, Wyd. Naukowe Uniw. im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań 1999.

[1] *Instytut Matematyki*
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
ul. Podchorążych 2, 34-084 Kraków
E-mail: ania123wch@gmail.com

Przysłano: 9.06.2017; publikacja on-line: 13.09.2017.