Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 4 (2017), 21-27

Prace Koła Matematyków
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2017)

Damian Komonicki[1]

Twierdzenie Brouwera o niezmienniczości obszaru

Streszczenie. Artykuł zawiera szczegółowe i „samowystarczalne" omówienie dowodu klasycznego twierdzenia Brouwera o zachowaniu obszaru, podanego przez W. Kulpę i zmodyfikowanego przez T. Tao.

Abstract. We give a detailed and self-contained exposition of a proof of Brouwer's invariance of domain theorem due to Kulpa and Tao.

1. Wprowadzenie

Jednym z największych osiągnięć nowoczesnej matematyki jest dokonane przez Georga Cantora (1845-1918) uściślenie pojęcia nieskończoności. Cantor stworzył podwaliny teorii mnogości, w której głównym przedmiotem badań są zbiory nieskończone. Na gruncie tej teorii udowodniono wkrótce dość zaskakujące twierdzenia. Jedno z nich mówi, że przestrzenie euklidesowe $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$, gdzie $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, przy czym $n \neq m$, mają dokładnie tyle samo elementów, czyli traktowane jako zbiory są nierozróżnialne. Jeśli jednak przestrzenie te wyposażymy w naturalną strukturę liniową (nad $\mathbb{R}$), to staną się nieizomorficzne. Algebra liniowa potrafi je zatem rozróżnić. Na początku XX wieku powstało pytanie, czy przestrzenie euklidesowe o różnych dodatnich wymiarach są rozróżnialne także z topologicznego punktu widzenia. Tym problemem zajmowali się Peano, Hilbert i Sierpiński. Jednak dopiero Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966), wykorzystując stworzone przez siebie mechanizmy topologii algebraicznej pokazał, że jeśli liczby $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ są różne, to przestrzenie $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ nie są homeomorficzne. Wynik ten jest prostą konsekwencją twierdzenia Brouwera o niezmienniczości obszaru.

Przypomnijmy tytułowe twierdzenie.

AMS (2010) Subject Classification: 54C05, 57N15, 57N35.

Słowa kluczowe: przestrzeń euklidesowa, ciągła injekcja, odwzorowanie otwarte, homeomorfizm, topologiczna niezmienniczość wymiaru.

[2] *Brouwer's Invariance of Domain Theorem*

TWIERDZENIE 1.1
Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie niepustym zbiorem otwartym oraz $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ciągłą injekcją. Wówczas $f(U)$ również jest podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Głównym celem artykułu jest szczegółowe i możliwie „samowystarczalne” omówienie dowodu Twierdzenia 1.1 podanego przez Władysława Kulpę [4], a następnie zmodyfikowanego przez Terence'a Tao [7]. W dowodzie tym korzysta się z twierdzenia Brouwera o punkcie stałym, twierdzenia Tietzego, twierdzenia aproksymacyjnego Weierstrassa i pewnej podstawowej własności miary Lebesgue'a. Oryginalne sformułowanie i dowód twierdzenia Brouwera o niezmienniczości obszaru można znaleźć w [1]. Rozważamy tylko zwykłą topologię euklidesową w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i jej podzbiorach.

2. Topologiczna niezmienniczość wymiaru

Pokażemy najpierw, w jaki sposób niehomeomorficzność przestrzeni euklidesowych o różnych wymiarach wynika z Twierdzenia 1.1.

PROPOSITION 2.1 (BROUWER)
Jeśli tylko $n \neq m$, to przestrzenie $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ nie są homeomorficzne.

Dowód. Dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że $m < n$. Załóżmy wbrew tezie, że istnieje homeomorfizm $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Niech $\iota : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem zdefiniowanym za pomocą wzoru

$$\iota(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0).$$

Jest jasne, że ι to ciągła injekcja. Wtedy $\iota \circ h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ również jest ciągłą injekcją. Z Twierdzenia 1.1 wynika zatem, że $(\iota \circ h)(\mathbb{R}^n)$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$. Z drugiej jednak strony $(\iota \circ h)(\mathbb{R}^n)$ zawiera się we właściwej podprzestrzeni liniowej przestrzeni $\mathbb{R}^n$, więc jest zbiorem nigdziegęstym w $\mathbb{R}^n$. Sprzeczność! ■

Fakt, że prosta $\mathbb{R}$ nie jest homeomorficzna z żadną wyżej wymiarową przestrzenią euklidesową, można udowodnić w sposób zupełnie elementarny, nie korzystając z twierdzenia o niezmienniczości obszaru. Przypomnijmy ten dowód. Jeśli mianowicie $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem, to

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \longmapsto h(x) \in \mathbb{R}^n \setminus \{h(0)\}$$

również jest homeomorfizmem. Tymczasem przy założeniu, że $n \geq 2$, tylko jeden ze zbiorów $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $\mathbb{R}^n \setminus \{h(0)\}$ jest niespójny.

3. Kilka potrzebnych twierdzeń i lematów.

Normę euklidesową w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać przez $\|\cdot\|$, zaś domkniętą kulę jednostkową w tej przestrzeni – przez B^n, czyli

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

Przypomnijmy twierdzenie Brouwera o punkcie stałym, twierdzenie Tietzego i twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa.

TWIERDZENIE 3.1 (Brouwer)
Jeśli odwzorowanie $f : B^n \longrightarrow B^n$ jest ciągłe, to istnieje taki punkt $p \in B^n$, że $f(p) = p$.

Krótki i efektowny dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w [6].
Będziemy potrzebować dwóch klasycznych twierdzeń.

TWIERDZENIE 3.2 (Tietze)
Niech $A \neq \emptyset$ będzie podzbiorem domkniętym przestrzeni metrycznej X, niech J będzie ograniczonym przedziałem domkniętym na prostej $\mathbb{R}$ i niech $\varphi : A \longrightarrow J$ będzie funkcją ciągłą. Istnieje wówczas taka funkcja ciągła $\Phi : X \longrightarrow J$, że $\Phi(x) = \varphi(x)$ dla każdego $x \in A$.

Połóżmy $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

TWIERDZENIE 3.3 (Weierstrass)
Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym zbiorem zwartym i niech $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Dla dowolnego $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, istnieje taki wielomian $\omega \in \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_n]$, że $|\varphi(x) - \omega(x)| < \varepsilon$ dla każdego $x \in K$.

Dowody Twierdzeń 3.2 i 3.3 można znaleźć, odpowiednio, w [3] oraz [5].
Wykażemy teraz kilka prostych lematów, na których już bezpośrednio opiera się dowód Kulpy-Tao. Kluczowe znaczenie ma lemat o stabilności miejsca zerowego (wyodrębnił go Tao).

LEMAT 3.4
Niech $f : B^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie ciągłą injekcją. Istnieje wówczas takie odwzorowanie ciągłe $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, że $g(f(x)) = x$ dla każdego $x \in B^n$.

Dowód. Ze zwartości kuli B^n oraz ciągłości i różnowartościowości odwzorowania f wynika, że odwzorowanie odwrotne $f^{-1} : f(B^n) \longrightarrow B^n$ jest ciągłe. Niech następnie $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : f(B^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami, że $f^{-1} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Niech $i \in \{1, \ldots, n\}$. Z ciągłości odwzorowania f^{-1} wynika, że funkcja φ_i jest ciągła. Ponieważ zbiorem wartości odwzorowania f^{-1} jest B^n, to $\varphi_i(f(B^n)) = [-1, 1]$. Odnotujmy jeszcze, że $f(B^n)$ jest podzbiorem domkniętym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (jest to bowiem zbiór zwarty). Na mocy twierdzenia Tietzego istnieje zatem taka funkcja ciągła $\Phi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-1, 1]$, że $\Phi_i(y) = \varphi_i(y)$ dla każdego $y \in f(B^n)$. Niech $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie zestawieniem funkcji $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Odwzorowanie g jest oczywiście ciągłe. Ponadto dla dowolnego $x \in B^n$ mamy

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= (\Phi_1(f(x)), \ldots, \Phi_n(f(x))) = \\ &= (\varphi_1(f(x)), \ldots, \varphi_n(f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x. \end{aligned}$$

■

UWAGA 3.5
Niech $f : B^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będą jak w poprzednim lemacie. Wówczas

$$\exists\, \delta \in \mathbb{R}_+ \,\forall\, y \in \mathbb{R}^n : \; \|y - f(0)\| < 2\delta \implies \|g(y)\| < 1/3.$$

Dowód. Odnotujmy najpierw, że $g(f(0)) = 0$. Niech $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}_+$ będzie liczbą „dobraną do $\varepsilon = 1/3$" na podstawie ciągłości odwzorowania g w punkcie $f(0)$. Jeśli teraz $y \in \mathbb{R}^n$ spełnia warunek $\|y - f(0)\| < \tilde{\delta}$, to

$$\|g(y)\| = \|g(y) - g(f(0))\| < 1/3.$$

Żeby zakończyć dowód, wystarczy zatem położyć $\delta = \tilde{\delta}/2$. ■

Lemat 3.6 (o stabilności miejsca zerowego)
Niech $f : B^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będą nadal jak w Lemacie 3.4. Wówczas każde odwzorowanie ciągłe $\tilde{g} : f(B^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, które spełnia warunek

$$\forall\, y \in f(B^n) : \|g(y) - \tilde{g}(y)\| \leq 1,$$

ma przynajmniej jedno miejsce zerowe.

Dowód. Jeśli $x \in B^n$, to $\|x - \tilde{g}(f(x))\| = \|g(f(x)) - \tilde{g}(f(x))\| \leq 1$, czyli $x - \tilde{g}(f(x)) \in B^n$. W takim razie $B^n \ni x \longmapsto x - \tilde{g}(f(x)) \in B^n$ jest poprawnie zdefiniowanym odwzorowaniem ciągłym. Z twierdzenia Brouwera o punkcie stałym wynika zatem, że $p - \tilde{g}(f(p)) = p$ dla pewnego $p \in B^n$. Skoro tak, to $f(p)$ jest miejscem zerowym odwzorowania $\tilde{g}$. ■

Lemat 3.7
Niech $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ i niech $E \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem spełniającym warunek $0 \in E$. Jeśli wówczas wnętrze zbioru E jest puste, to istnieje taki wektor $v \in \mathbb{R}^n$, że $\|v\| < \varepsilon$ oraz $0 \notin \{v + x : x \in E\}$.

Dowód. Połóżmy $B = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| < \varepsilon\}$ i przypuśćmy, że

$$0 \in \{u + x : x \in E\}$$

dla każdego $u \in B$. Wtedy

$$\forall\, u \in B\, \exists\, y \in E : -u = y.$$

Skoro tak, to $B = \{-u : u \in B\} \subseteq E$, co oznacza, że wnętrze zbioru E jest niepuste. ■

4. Dowód twierdzenia Brouwera o niezmienniczości obszaru.

Twierdzenie Brouwera o niezmienniczości obszaru okaże się na końcu artykułu prostym wnioskiem z następującego faktu. (W istocie ten fakt i Twierdzenie 1.1 są równoważne).

Twierdzenie 4.1
Niech $f : B^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie ciągłą injekcją. Wówczas $f(0)$ jest punktem wewnętrznym zbioru $f(B^n)$.

Dowód. Załóżmy, wbrew tezie, że $f(0)$ jest punktem brzegowym zbioru $f(B^n)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ będą takie jak, odpowiednio, w Uwadze 3.4 i Lemacie 3.5. Ponieważ $f(0)$ jest punktem brzegowym zbioru $f(B^n)$, to

$$\exists\, c \in \mathbb{R}^n \setminus f(B^n) : \|f(0) - c\| < \delta.$$

Odwzorowanie $f_c : B^n \ni x \longmapsto f(x) - c \in \mathbb{R}^n$ jest oczywiście ciągłą injekcją. Odwzorowanie $g_c : \mathbb{R}^n \ni y \longmapsto g(y+c) \in \mathbb{R}^n$ również jest ciągłe. Co więcej, $g_c(f_c(x)) = x$ dla każdego $x \in B^n$.

Rozważmy następnie zbiór $S_1 = \{y \in f_c(B^n) : \|y\| \geq \delta\}$. Jest on podzbiorem domkniętym zbioru zwartego $f_c(B^n)$, więc jest zwarty. Ponieważ

$$\|f_c(0)\| = \|f(0) - c\| < \delta$$

(skąd $f_c(0) \notin S_1$) oraz $f_c(0)$ jest jedynym miejscem zerowym odwzorowania g_c w zbiorze $f_c(B^n)$, to $g_c(y) \neq 0$ dla każdego $y \in S_1$. Inaczej mówiąc,

$$\forall\, y \in S_1 : \|g_c(y)\| > 0.$$

Z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów zastosowanego do funkcji ciągłej $\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto \|g_c(y)\| \in \mathbb{R}$ i zbioru zwartego $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ wynika zatem istnienie takiej liczby $\delta_1 \in \mathbb{R}_+$, że

$$\begin{cases} \forall\, y \in S_1 : \|g_c(y)\| > \delta_1, \\ \delta_1 < 1/3. \end{cases}$$

Ponieważ sfera $S_2 = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| = \delta\}$ jest zwarta, to zwarty jest również zbiór $S = S_1 \cup S_2$. Niech $\gamma_1, \ldots, \gamma_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami, że $g_c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Niech $i \in \{1, \ldots, n\}$. Funkcja γ_i jest ciągła, więc – na mocy twierdzenia aproksymacyjnego Weierstrassa – istnieje taki wielomian $\omega_i \in \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_n]$, że $|\gamma_i(y) - \omega_i(y)| < \frac{\delta_1}{2\sqrt{n}}$ dla każdego $y \in S$. Odwzorowanie wielomianowe $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ spełnia zatem warunek

$$\forall\, y \in S : \|g_c(y) - \Omega(y)\| < \delta_1/2.$$

Sfera S_2 ma miarę Lebesgue'a równą 0. Odwzorowanie Ω jest oczywiście klasy $\mathcal{C}^1$. Skoro tak, to zbiór $\Omega(S_2)$ również ma miarę Lebesgue'a równą 0 [2, Stwierdzenie 7.4.6], co oznacza wnętrze tego zbioru jest puste. Lemat 3.7 gwarantuje istnienie takiego wektora $v \in \mathbb{R}^n$, że $\|v\| < \delta_1/2$ oraz

$$0 \notin \{v + y : y \in \Omega(S_2)\}.$$

Odwzorowanie $\tilde{\Omega} : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto v + \Omega(x) \in \mathbb{R}^n$ nie ma zatem miejsc zerowych na sferze S_2. Przypuśćmy, że $y \in S_1$. Wtedy $\|g_c(y)\| > \delta_1$ oraz

$$(*) \qquad \|g_c(y) - \tilde{\Omega}(y)\| \leq \|g_c(y) - \Omega(y)\| + \|v\| < \delta_1$$

(zauważmy, że w istocie nierówności oznaczone gwiazdką zachodzą dla każdego $y \in S$), skąd $\tilde{\Omega}(y)$ należy do euklidesowej kuli otwartej o środku $g_c(y)$ i promieniu δ_1, zaś 0 do tej kuli nie należy. W takim razie $\tilde{\Omega}(y) \neq 0$. Podsumowując, $\tilde{\Omega}$ nie znika w żadnym punkcie zbioru S.

Wybierzmy (dowolnie) $y \in f_c(B^n)$. Przypomnijmy, że $c \in \mathbb{R}^n \setminus f(B^n)$. Wobec tego $0 \notin f_c(B^n)$. Połóżmy $\psi(y) = \max\{1, \delta\|y\|^{-1}\}$. Jeśli $\|y\| \geq \delta$, to $\psi(y) = 1$, stąd $\psi(y)y \in S_1$. Jeśli natomiast $\|y\| < \delta$, to $\psi(y) = \delta\|y\|^{-1}$, skąd $\|\psi(y)y\| = \delta$, czyli $\psi(y)y \in S_2$. W takim razie

$$k : f_c(B^n) \ni y \longmapsto \psi(y)y \in S$$

jest poprawnie zdefiniowanym odwzorowaniem ciągłym.

Rozważmy w końcu odwzorowanie ciągłe $\tilde{g} = \tilde{\Omega} \circ k : f_c(B^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Niech znowu $y \in f_c(B^n)$. Jeśli $\|y\| \geq \delta$, to $y \in S_1$ oraz $k(y) = y$, więc na podstawie nierówności $(*)$ mamy

$$\|g_c(y) - \tilde{g}(y)\| = \|g_c(y) - \tilde{\Omega}(k(y))\| = \|g_c(y) - \tilde{\Omega}(y)\| < \delta_1.$$

Przypuśćmy teraz, że $\|y\| < \delta$. Wobec tego $\|k(y)\| = \|\psi(y)y\| = \delta$. Jeśli zatem $z \in \{y, k(y)\}$, to

$$\|z + c - f(0)\| \leq \|z\| + \|f(0) - c\| < 2\delta,$$

skąd już mamy $\|g_c(z)\| = \|g(z + c)\| < 1/3$ (Lemat 3.5). Co więcej, ponieważ $k(y) \in S$, to z nierówności $(*)$ wynika, że $\|g_c(k(y)) - \tilde{\Omega}(k(y))\| < \delta_1$. W takim razie

$$\|g_c(y) - \tilde{g}(y)\| = \|g_c(y) - g_c(k(y)) + g_c(k(y)) - \tilde{\Omega}(k(y))\| \leq$$

$$\leq \|g_c(y)\| + \|g_c(k(y))\| + \|g_c(k(y)) - \tilde{\Omega}(k(y))\| < \frac{2}{3} + \delta_1.$$

Powyższe oszacowania prowadzą natychmiast do wniosku, że

$$\forall\, y \in f_c(B^n) : \|g_c(y) - \tilde{g}(y)\| < \frac{2}{3} + \delta_1.$$

Ponieważ przy tym g_c jest odwzorowaniem „dobranym do f_c” w sensie Lematu 3.4 oraz $\frac{2}{3} + \delta_1 < 1$, Lemat 3.6 gwarantuje, że $\tilde{g}$ ma przynajmniej jedno miejsce zerowe. Z drugiej jednak strony, odwzorowanie $\tilde{\Omega}$ nie znika w żadnym punkcie zbioru S, więc $\tilde{g}$ w ogóle nie ma miejsc zerowych. Otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy dowód. ■

Wróćmy do oznaczeń i założeń z Twierdzenia 1.1. Udowodnienie otwartości zbioru $f(U)$ sprowadza się do pokazania, że jeśli $x \in U$, to $f(x)$ jest dla $f(U)$ punktem wewnętrznym. Wybierzmy zatem (dowolnie) $x \in U$. Ponieważ U jest zbiorem otwartym, to istnieje taka liczba $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, że euklidesowa kula domknięta $\bar{B}$ o środku x i promieniu ε zawiera się w U. Jest jasne, że

$$h : B^n \ni z \longmapsto \varepsilon z + x \in \bar{B}$$

to poprawnie zdefiniowany homeomorfizm. W takim razie $f \circ h : B^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest ciągłą injekcją. Odnotujmy, że $(f \circ h)(B^n) = f(\bar{B})$ oraz $(f \circ h)(0) = f(x)$. Z Twierdzenia 4.1 zastosowanego do $f \circ h$ wynika zatem, że $f(x)$ jest punktem wewnętrznym zbioru $f(\bar{B}) \subseteq f(U)$, więc także punktem wewnętrznym zbioru $f(U)$. Nasza prezentacja dowodu Kulpy-Tao ostatecznie dobiegła w ten sposób końca.

References

[1] L. E. J. Brouwer, *Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets*, Math. Ann. 72(1912), No. 1, 55–56, MR 1511685, JFM 43.0479.03.

[2] L. M. Drużkowski, *Analiza matematyczna dla fizyków. 1, Podstawy*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 1995 (Skrypty Uczelniane – Uniwersytet Jagielloński, nr 731).

[3] R. Engelking, K. Sieklucki, *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa, 1986 (Biblioteka Matematyczna, t. 62), MR 890745, Zbl 0683.54002.

[4] W. Kulpa, *Poincaré and domain invariance theorem*, Acta Univ. Carol., Math. Phys., 39(1998), No. 1-2, 127–13, MR 1696596, Zbl 1007.54040.

[5] K. Maurin, *Analiza. Cz. 1, Elementy*, PWN, Warszawa, 2010, Zbl 0246.00005.

[6] C. A. Rogers, *A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed-point theorem*, Am. Math. Mon. 87(1980): 525–527, MR 600910, Zbl 0447.57020.

[7] T. Tao, Brouwer's fixed point and invariance of domain theorems, and Hilbert's fifth problem, terrytao.wordpress.com/2011/06/13.

[1] *Instytut Matematyki*
Politechnika Krakowska
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków,
E-mail: damian.komonicki@gmail.com

Przysłano: 9.05.2017; publikacja on-line: 28.09.2017.