



## Prace Koła Matematyków Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2019)

Paulina Fraś<sup>1</sup>

### Badanie możliwości wykorzystania muzyki w nauczaniu symetrii osiowej i środkowej na poziomie szkoły podstawowej

**Streszczenie.** W niniejszej pracy zaprezentowano wybrane przykłady występowania matematyki w muzyce oraz możliwość wykorzystania muzyki w nauczaniu symetrii osiowej i środkowej na poziomie szkoły podstawowej.

**Abstract.** We present examples of obvious connections between mathematics and music and the possibility of using music in teaching axial symmetry and central symmetry at the primary school.

#### 1. Wstęp

Niniejsza praca dotyczy badania wykorzystania muzyki do nauki matematyki na przykładzie przekształceń geometrycznych. Celem mojej pracy było poszukiwanie odpowiedzi na pytania, które zawarłam w trzech grupach:

- Czy uczniowie szkoły muzycznej, nauczyciel matematyki i nauczyciel zasad muzyki zauważają związki między matematyką a muzyką? Czy widzą możliwość wykorzystania transferu wiedzy między matematyką a muzyką? Jeśli tak, to czy są stosowane wzajemne odwołania na lekcjach obu przedmiotów?
- Jak można zaprojektować lekcję o przekształceniach geometrycznych – takich, jak symetria osiowa i środkowa – z wykorzystaniem muzyki? Czy taka propozycja dydaktyczna jest możliwa do realizacji?
- Czy ukazanie modelu transformacji melodii w nauczaniu przekształceń geometrycznych może być skuteczne? Czy uczniowie szkoły muzycznej potrafią skorygować swoje błędy z zakresu symetrii środkowej i osiowej po

---

AMS (2010) Subject Classification: 00A35.

Słowa kluczowe: dydaktyka matematyki, symetria osiowa, symetria środkowa.

<sup>2</sup>Research on the possibility of using music in the teaching of axial and central symmetry at the primary school.

zaprezentowaniu związku tych przekształceń geometrycznych z transformacjami melodii?

W rozdziale drugim prezentuję wybrane przykłady występowania matematyki w muzyce. Przedstawiam także przekształcenia melodii w postaci: inwersji, raka, inwersji raka.

W rozdziale trzecim przedstawiam podział całego badania i krótko je charakteryzuję.

Rozdział czwarty jest opisem badania przygotowawczego. Przedstawiam w nim użyte narzędzia badawcze, jego organizację oraz przebieg. Dokonuję analizy prac uczniów i nauczycieli.

Rozdział piąty poświęciłam na opis badania zasadniczego wraz z użytymi w nim narzędziami badawczymi. Przedstawiam i szczegółowo analizuję wyniki zebrane w trakcie tej części badania.

Rozdział szósty jest podsumowaniem niniejszej pracy.

## 2. Symetria w matematyce i muzyce

Język matematyki jest używany przez specjalistów w wielu dziedzinach nauki – ma zastosowanie między innymi w fizyce, chemii oraz biologii. Co więcej, język ten można zauważyć także w tych gałęziach nauki, które wydają się być umiejscowione na przeciwnym biegunie – w sztuce oraz w muzyce.

Szczególną uwagę w niniejszej pracy poświęciłam zależnościom zachodzącym między symetrią środkową i symetrią osiową a muzyką.

Otóż na przełomie siedemnastego i osiemnastego wieku, kompozytor Jan Sebastian Bach w swoich utworach, a szczególnie w fugach stosował imitację, która polega na powtórzeniu melodii jednego głosu przez drugi głos, równocześnie gdy pierwszy głos kontynuuje swój materiał melodyczny. Ten zabieg muzyczny mocno jest związany z przekształceniami geometrycznymi. Ponieważ na początku utworu w jednym z głosów występuje temat, czyli krótka, najczęściej dwutaktowa melodia. W dalszej części utworu ta melodia zostaje przekształcona. W teorii muzyki przekształcenia takie mają swoje nazwy: inwersja, rak, inwersja raka. Te przekształcenia są analogiczne do przekształceń geometrycznych takich jak: symetria osiowa, symetria środkowa, które opiszę w dalszej części pracy.

W kontekście związków matematyki z muzyką ilustratywnym przykładem innego typu jest budowa formy sonatowej. W tej kompozycji można również zauważyć innego typu symetrię. Zwykle forma sonatowa jest trzyczęściowa. Składa się ona z ekspozycji, przetworzenia i reprzyzy. W pierwszej części pojawia się tzw. temat melodyczny, który jest podstawą całego utworu. Następnie w drugiej części temat ten jest przekształcany. Z kolei w reprzyzie, czyli w trzeciej części wraca niemal identyczne powtórzenie ekspozycji. Budowa takiego utworu jest schematem, który cechuje symetria. Oś symetrii przypada na część B.

Anna Brożek podaje w swojej książce przykład zastosowania symetrii osiowej w budowie utworów: „Najbliższym nam przykładem na taką muzyczną formę są piosenki zbudowane na zasadzie zwrotka – refren” ([2, str.89]). Zwrotki mają podobną budowę, natomiast refren jest kontrastującym odcinkiem muzycznym. Oś symetrii przypada na środek czasu trwania utworu.

Ważnym utworem muzycznym, w którym kompozytor zastosował przede wszystkim symetrię osiową jest *Kanon lustrzany* Wolfganga Amadeusza Mozarta. Jest to utwór na dwoje skrzypiec, który można wykonać posługując się tylko jednym zestawem nut. Melodia drugich skrzypiec jest dokładnie odbiciem lustrzanym partii pierwszych skrzypiec.

Szukając związku matematyki z muzyką natrafiłam na zdanie, które wypowiedział filozof Kasjodor: „Muzyka jest nauką o liczbach”.<sup>3</sup>

Okazuje się, że matematyka nie jest obca muzyce. Co również potwierdza kompozytor barokowy J. Ph. Rameau: „Muzyka jest nauką, zatem powinna posiadać ściśle określone reguły wyprowadzone z jakiejś ewidentnej zasady, a zasada ta może być rozpoznana tylko za pomocą matematyki”.<sup>4</sup>

Takie naukowe próby ujęcia muzyki w ramy matematyki są podejmowane między innymi w książkach: [1], [2], [3].

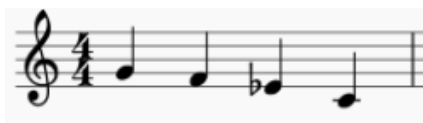
## 2.1. Przekształcenia melodii w postaci inwersji, raka, inwersji raka

### 2.1.1. Przekształcenie melodii w postaci inwersji – analogia do symetrii osiowej (względem prostej w poziomym położeniu)



RYSUNEK 2.1. Temat melodyczny (źródło: opracowanie własne).

Jednym z przekształceń melodii występujących w muzyce jest inwersja. Przekształcając powyższą melodię (Rys. 2.1.) w postaci inwersji, dźwięk g1 pozostaje bez zmian, gdyż melodia jest zapisana w kluczu wiolinowym, który określa położenie tegoż dźwięku. Kolejny dźwięk to a1, aby go przekształcić w postaci inwersji należy policzyć półtony między dźwiękami g1 – a1. Są dwa półtony: g1 – gis1, gis1 – a1. Następnie od dźwięku g1 należy policzyć dwa półtony w dół. W konsekwencji otrzymaną nutą będzie dźwięk f, zatem wszystkie dźwięki znajdujące się powyżej tego dźwięku, są przekształcane poniżej (jak w tym przykładzie) lub odwrotnie. Po przekształceniu melodii w postaci inwersji otrzymamy melodię (Rys. 2.2.):



RYSUNEK 2.2. Melodia przekształcona względem inwersji (źródło: opracowanie własne).

W przekształceniu melodii w postaci inwersji można dostrzec analogię do matematycznego przekształcenia – symetrii osiowej (względem prostej w poziomym

<sup>3</sup>[https://repozytorium.uwb.edu.pl/jspui/bitstream/11320/1470/1/Idea\\_2007\\_19\\_Burakowski.pdf](https://repozytorium.uwb.edu.pl/jspui/bitstream/11320/1470/1/Idea_2007_19_Burakowski.pdf)

<sup>4</sup><https://kawiarniaszkocka.matmatic.pl/blog/2017/1/24/matematyka-w-muzyce>

położeniu) (Rys. 2.3.), gdyż wszystkie dźwięki „położone” są w równej odległości (mierzonej interwałami) od osi poziomej i po jej przeciwnych stronach.



RYSUNEK 2.3. Symetria osiowa - względem osi w poziomym położeniu (źródło: opracowanie własne).

### 2.1.2. Przekształcenie melodii w postaci raka – analogia do symetrii osiowej (względem prostej w pionowym położeniu)

Przekształcenie melodii w postaci raka często jest nazywane „ruchem wstecznym” lub lustrzanym odbiciem linii melodycznej. Przekształcając melodię pierwotną (Rys. 2.1.) w postaci raka, wszystkie dźwięki należy zapisać „od końca do początku”. W konsekwencji otrzymamy melodię (Rys. 2.4.):



RYSUNEK 2.4. Melodia przekształcona względem raka (źródło: opracowanie własne).

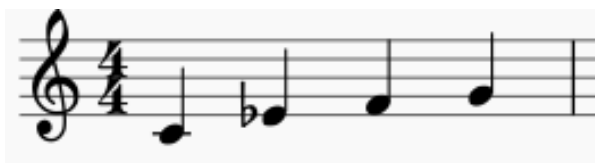
W przekształceniu melodii w postaci raka można dostrzec analogię do matematycznego przekształcenia – symetrii osiowej (względem prostej w pionowym położeniu), która również często jest nazywana lustrzanym odbiciem (Rys. 2.5.). Wszystkie dźwięki „położone” są w równej odległości od osi pionowej i po jej przeciwnych stronach.



RYSUNEK 2.5. Symetria osiowa - względem prostej w pionowym położeniu (źródło: opracowanie własne).

### 2.1.3. Przekształcenie melodii w postaci inwersji raka – analogia do symetrii środkowej

Przekształcając melodię pierwotną (Rys. 2.1.) względem inwersji raka najpierw melodia zostaje przekształcona w postaci raka następnie powstała melodia jest przekształcana względem inwersji. W konsekwencji otrzymamy melodię (Rys. 2.6.):



RYSUNEK 2.6. Melodia przekształcona względem inwersji raka (źródło: opracowanie własne).

W przekształceniu melodii w postaci inwersji raka można dostrzec analogię z symetrią środkową. Najpierw melodia przekształcana jest względem osi pionowej (w muzyce – rak), następnie powstała melodia przekształcana jest względem osi poziomej (w muzyce – inwersja). W konsekwencji jest to złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach prostopadłych, czyli symetria środkowa.

### 3. Cele badania, metodologia badania

Celem ogólnym niniejszej pracy była próba zbadania, czy kształtowanie u uczniów rozumienia pojęcia symetrii osiowej i środkowej może być wspierane za pomocą przekształceń melodii względem inwersji, raka oraz inwersji raka.

W całym badaniu wzięli udział: nauczyciel matematyki, nauczyciel zasad muzyki oraz uczniowie z klasy siódmej Ogólnokształcącej Szkoły Muzycznej I stopnia w Krakowie. Na początku badania, aby zmniejszyć poczucie stresu wśród uczniów i nauczycieli, poinformowałam wszystkich badanych o tym, że ich praca nie będzie podlegała ocenie.

Całość badania podzieliłam na dwie części: badanie przygotowawcze i badanie zasadnicze (Tab. 3.1.):

TABELA 3.1. Podział badania.

Badanie przygotowawcze	I. Test inteligencji
	II. Kwestionariusz dla uczniów klasy VII
	III. Kwestionariusz dla nauczyciela matematyki
	IV. Kwestionariusz dla nauczyciela zasad muzyki
Badanie zasadnicze	I. ARKUSZ I
	II. Przeprowadzenie lekcji
	III. ARKUSZ II

Badanie przygotowawcze miało na celu zdiagnozować:

- profil inteligencji wielorakich wg H. Gardnera u badanych uczniów, który rodzaj inteligencji u uczniów jest dominujący.

Badanie przygotowawcze było również poszukiwaniem odpowiedzi na następujące pytania:

- Czy uczniowie sami dostrzegają analogie między matematyką a muzyką?
- Czy na lekcjach muzyki i matematyki były prezentowane zależności między symetrią osiową, środkową a przekształceniami melodii?

Badanie zasadnicze było poszukiwaniem odpowiedzi na następujące pytania:

- Czy uczniowie zauważają związki między symetrią środkową, symetrią osiową a przekształceniami melodii w postaci: inwersji, raka, inwersji raka?
- Jakie błędy pojawiają się u uczniów podczas rozwiązywania zadań z zakresu symetrii środkowej i osiowej?
- Czy uczniowie potrafią skorygować swoje błędy z zakresu symetrii środkowej i osiowej po zaprezentowaniu związków przekształceń geometrycznych z transformacjami melodii?
- Czy wykorzystanie muzyki do nauki symetrii osiowej i symetrii środkowej jest skuteczne?
- Czy w szkołach muzycznych oraz u uczniów zainteresowanych muzyką można wykorzystać przekształcenia melodii jako nowy, pomocniczy model kształtowania u uczniów pojęcia przekształceń geometrycznych takich jak symetria osiowa i środkowa?

W kolejnym rozdziale opisuję przebieg badania zasadniczego wraz z narzędziami badawczymi i błędami popełnianymi przez uczniów.

## **4. Badanie przygotowawcze – organizacja, narzędzia badawcze, opis realizacji, wyniki badań i ich analiza**

### **4.1. Organizacja badania przygotowawczego**

W badaniu przygotowawczym posłużyłam się testem na profil inteligencji, według Teorii Wielorakich Inteligencji Howarda Gardnera. Test ten badał poziom rozwoju poszczególnych inteligencji u uczniów. Wykorzystałam również zaprojektowane przeze mnie kwestionariusze dla uczniów oraz nauczyciela zasad muzyki i nauczyciela matematyki. Na podstawie tych kwestionariuszy chciałam uzyskać informacje, czy nauczyciele na lekcjach łączyli matematykę z muzyką i czy ucząc o symetrii środkowej oraz osiowej wykorzystywali przekształcenia muzyczne. W badaniu wykorzystałam także zaprojektowany przeze mnie kwestionariusz dla uczniów klasy VII. Na jego podstawie chciałam uzyskać informacje o tym, czy uczniowie dostrzegają związek matematyki z muzyką. W następnych dwóch punktach przedstawiam wykorzystane w tej części narzędzia badawcze.

### **4.2. Narzędzia badawcze**

#### **4.2.1. Test diagnozujący profil inteligencji**

W niniejszym podrozdziale opisuję przebieg pierwszej części badania przygotowawczego. W tej części badania posłużyłam się testem badającym poziom poszczególnych inteligencji uczniów. Opisany test powstał na bazie Teorii Wielorakich Inteligencji Howarda Gardnera.

Poprzez użycie tego testu w badaniu przygotowawczym chciałam uzyskać odpowiedzi na następujące pytania:

Bad. możliwości wykorzystania muz. w naucz. sym. os. i środ. na poz. szk. podst. [29]

- czy w szkole muzycznej dominującym typem inteligencji u uczniów jest inteligencja muzyczna?
- czy poziomy rozwoju inteligencji muzycznej i matematycznej są ze sobą powiązane?

Test ten uczniowie wypełnili podczas lekcji religii. Do tej części badania przystąpiło łącznie 18 uczniów.

#### 4.2.2. Kwestionariusz dla uczniów klasy VII

W podrozdziale tym prezentuję pytania, które zamieściłam w zaprojektowanym przeze mnie kwestionariuszu dla uczniów klasy VII. Ta część badania została przeprowadzona podczas godziny wychowawczej. Kwestionariusz wypełniło łącznie 15 uczniów.

##### KWESTIONARIUSZ DLA UCZNIÓW KLASY VII

1) Czy na lekcjach historii muzyki lub zasad muzyki wykorzystywałeś lub zauważyłeś wiedzę z matematyki?

TAK | NIE

**Jeśli TAK, w jaki sposób?**

.....  
.....

2) Czy podczas rozwiązywania zadań z matematyki wykorzystywałeś wiedzę z muzyki?

TAK | NIE

**Jeśli TAK, w jaki sposób?**

.....  
.....

3) Czy dostrzegasz jakieś podobne cechy, analogie między matematyką a muzyką?

TAK | NIE

**Jeśli TAK, to wymień:**

.....  
.....

4) Jak myślisz, czy nauka muzyki może mieć wpływ na naukę matematyki?

TAK NIE

Jeśli TAK, to wymień:

.....  
 .....

5) Jak myślisz, czy nauka matematyki może mieć wpływ na naukę muzyki?

TAK NIE

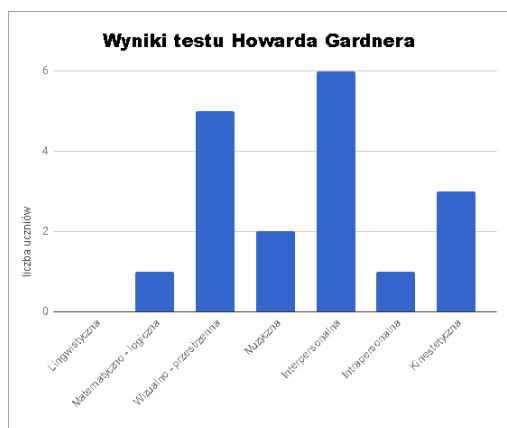
Jeśli TAK, to wymień:

.....  
 .....

### 4.3. Wyniki badań i ich analiza

#### 4.3.1. Analiza wyników testu na inteligencję Howarda Gardnera

Przyjrzymy się teraz wynikom testu na inteligencję Howarda Gardnera. Rys. 4.1. przedstawia wykres wyników wyłącznie dominujących typów inteligencji u badanych uczniów. Został on stworzony w taki sposób, iż najpierw u każdego ucznia wyznaczyłam dominujący typ inteligencji, a następnie podsumowałam ilu uczniów posiada dany typ inteligencji. Oto prezentuję Rys. 4.1.:



RYSUNEK 4.1. Wykres wyników wyłącznie dominujących typów inteligencji u badanych uczniów.

Wydaje się, że uczniowie uczęszczający do szkoły muzycznej będą posiadać dominującą inteligencję muzyczną. Jednakże analizując dane z powyższego wykresu, tylko dwóch uczniów ma tę inteligencję dominującą. Natomiast w przypadku inteligencji matematyczno-logicznej tylko u jednego ucznia ten typ inteligencji okazał



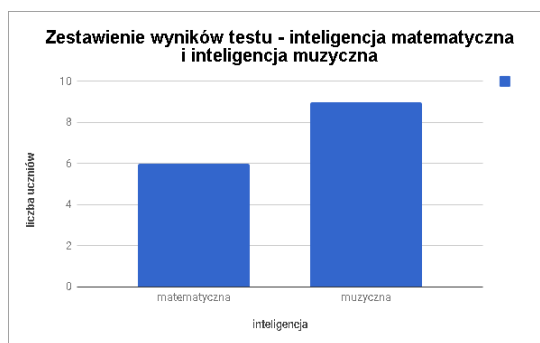
się być dominującym. Żaden spośród badanych uczniów nie posiada dominującej inteligencji lingwistycznej. Z wykresu wyraźnie widać, że najbardziej dominującą inteligencją u uczniów jest inteligencja interpersonalna.

Poniższa tabela zestawia dwa typy inteligencji: matematyczną i muzyczną wśród badanych uczniów:

TABELA 4.1. Wyniki inteligencji matematycznej i muzycznej.

Numery uczniów	Typy inteligencji	
	matematyczna	muzyczna
1	12	18
2	11	18
3	14	18
4	15	16
5	8	15
6	11	10
7	12,5	9,5
8	9	10
9	18	17
10	12	18
11	16	18
12	14	14
13	17	11
14	18	13

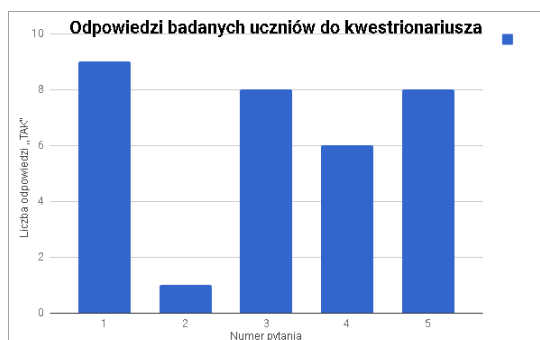
Analizując dane z powyższej tabeli ośmiu uczniów posiada bardziej dominującą inteligencję muzyczną. Uczeń o numerze 12 ma rozwiniętą na tym samym poziomie inteligencję muzyczną, jak i matematyczną. Wyniki wskazują na to, że trzech uczniów o numerach: 7, 13 i 14, ma zdecydowanie bardziej dominującą inteligencję matematyczną. U uczniów o numerach: 4, 6, 8, 9 i 11 różnica pomiędzy inteligencją matematyczną a muzyczną jest niewielka. Wyniki umieszczone w tabeli posłużyły do przedstawienia danych w postaci poniższego wykresu. Ucznia o numerze 12 przypisałam zarówno do inteligencji matematycznej jak i muzycznej.



RYSUNEK 4.2. Zestawienie wyników testu na inteligencję matematyczną i muzyczną.

#### 4.3.2. Analiza kwestionariuszy dla uczniów klasy VII

W podrozdziale tym prezentuję najciekawsze odpowiedzi uczniów jakie udzielili w KWESTIONARIUSZU DLA UCZNIÓW KLASY VII, który wcześniej przygotowałam. Podejmuję również próby ich interpretacji. W celu zilustrowania, czy uczniowie dostrzegają analogie między matematyką a muzyką przedstawiam wykres:



RYSUNEK 4.3. Zestawienie odpowiedzi badanych uczniów.

Analizując dane przedstawione na powyższym wykresie zauważamy, że aż 9 uczniów zadeklarowało, że świadomie wykorzystywało wiedzę matematyczną na lekcjach historii muzyki lub na lekcji zasad muzyki. Z kolei na pytanie 2 tylko jeden uczeń udzielił twierdzącej odpowiedzi. Na pytanie 3 ośmiu uczniów odpowiedziało, że dostrzega analogie między matematyką a muzyką. Badani podkreślali między innymi, że rytm i wartości rytmiczne ściśle są związane z matematyką oraz budowanie interwałów to „czysta matematyka”. Ośmiu uczniów odpowiedziało „TAK” na pytanie 5. Okazuje się, iż 6 uczniów twierdzi, że nauka muzyki może mieć wpływ na naukę matematyki.

Poniżej prezentuję wybrane odpowiedzi uczniów. Oto odpowiedź ucznia o numerze 15 (Rys. 4.4):

1) Czy na lekcjach historii muzyki lub zasad muzyki wykorzystywałeś lub zauważyłeś wiedzę z matematyki?

TAK	NIE
-----	-----

Jeśli TAK, w jaki sposób?  $a^1$

*Na lekcjach zasad muzyki, kiedy uczyliśmy się o alikwotach i Hz (440 drgań / 1s). Można zauważyć, że obliczanie tych alikwotów, to czysta matematyka. Sam tym obliczanie interwałów (1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 841. 842. 843. 844. 845. 846. 847. 848. 849. 850. 851. 852. 853. 854. 855. 856. 857. 858. 859. 860. 861. 862. 863. 864. 865. 866. 867. 868. 869. 870. 871. 872. 873. 874. 875. 876. 877. 878. 879. 880. 881. 882. 883. 884. 885. 886. 887. 888. 889. 890. 891. 892. 893. 894. 895. 896. 897. 898. 899. 900. 901. 902. 903. 904. 905. 906. 907. 908. 909. 910. 911. 912. 913. 914. 915. 916. 917. 918. 919. 920. 921. 922. 923. 924. 925. 926. 927. 928. 929. 930. 931. 932. 933. 934. 935. 936. 937. 938. 939. 940. 941. 942. 943. 944. 945. 946. 947. 948. 949. 950. 951. 952. 953. 954. 955. 956. 957. 958. 959. 960. 961. 962. 963. 964. 965. 966. 967. 968. 969. 970. 971. 972. 973. 974. 975. 976. 977. 978. 979. 980. 981. 982. 983. 984. 985. 986. 987. 988. 989. 990. 991. 992. 993. 994. 995. 996. 997. 998. 999. 1000. 1001. 1002. 1003. 1004. 1005. 1006. 1007. 1008. 1009. 1010. 1011. 1012. 1013. 1014. 1015. 1016. 1017. 1018. 1019. 1020. 1021. 1022. 1023. 1024. 1025. 1026. 1027. 1028. 1029. 1030. 1031. 1032. 1033. 1034. 1035. 1036. 1037. 1038. 1039. 1040. 1041. 1042. 1043. 1044. 1045. 1046. 1047. 1048. 1049. 1050. 1051. 1052. 1053. 1054. 1055. 1056. 1057. 1058. 1059. 1060. 1061. 1062. 1063. 1064. 1065. 1066. 1067. 1068. 1069. 1070. 1071. 1072. 1073. 1074. 1075. 1076. 1077. 1078. 1079. 1080. 1081. 1082. 1083. 1084. 1085. 1086. 1087. 1088. 1089. 1090. 1091. 1092. 1093. 1094. 1095. 1096. 1097. 1098. 1099. 1100. 1101. 1102. 1103. 1104. 1105. 1106. 1107. 1108. 1109. 1110. 1111. 1112. 1113. 1114. 1115. 1116. 1117. 1118. 1119. 1120. 1121. 1122. 1123. 1124. 1125. 1126. 1127. 1128. 1129. 1130. 1131. 1132. 1133. 1134. 1135. 1136. 1137. 1138. 1139. 1140. 1141. 1142. 1143. 1144. 1145. 1146. 1147. 1148. 1149. 1150. 1151. 1152. 1153. 1154. 1155. 1156. 1157. 1158. 1159. 1160. 1161. 1162. 1163. 1164. 1165. 1166. 1167. 1168. 1169. 1170. 1171. 1172. 1173. 1174. 1175. 1176. 1177. 1178. 1179. 1180. 1181. 1182. 1183. 1184. 1185. 1186. 1187. 1188. 1189. 1190. 1191. 1192. 1193. 1194. 1195. 1196. 1197. 1198. 1199. 1200. 1201. 1202. 1203. 1204. 1205. 1206. 1207. 1208. 1209. 1210. 1211. 1212. 1213. 1214. 1215. 1216. 1217. 1218. 1219. 1220. 1221. 1222. 1223. 1224. 1225. 1226. 1227. 1228. 1229. 1230. 1231. 1232. 1233. 1234. 1235. 1236. 1237. 1238. 1239. 1240. 1241. 1242. 1243. 1244. 1245. 1246. 1247. 1248. 1249. 1250. 1251. 1252. 1253. 1254. 1255. 1256. 1257. 1258. 1259. 1260. 1261. 1262. 1263. 1264. 1265. 1266. 1267. 1268. 1269. 1270. 1271. 1272. 1273. 1274. 1275. 1276. 1277. 1278. 1279. 1280. 1281. 1282. 1283. 1284. 1285. 1286. 1287. 1288. 1289. 1290. 1291. 1292. 1293. 1294. 1295. 1296. 1297. 1298. 1299. 1300. 1301. 1302. 1303. 1304. 1305. 1306. 1307. 1308. 1309. 1310. 1311. 1312. 1313. 1314. 1315. 1316. 1317. 1318. 1319. 1320. 1321. 1322. 1323. 1324. 1325. 1326. 1327. 1328. 1329. 1330. 1331. 1332. 1333. 1334. 1335. 1336. 1337. 1338. 1339. 1340. 1341. 1342. 1343. 1344. 1345. 1346. 1347. 1348. 1349. 1350. 1351. 1352. 1353. 1354. 1355. 1356. 1357. 1358. 1359. 1360. 1361. 1362. 1363. 1364. 1365. 1366. 1367. 1368. 1369. 1370. 1371. 1372. 1373. 1374. 1375. 1376. 1377. 1378. 1379. 1380. 1381. 1382. 1383. 1384. 1385. 1386. 1387. 1388. 1389. 1390. 1391. 1392. 1393. 1394. 1395. 1396. 1397. 1398. 1399. 1400. 1401. 1402. 1403. 1404. 1405. 1406. 1407. 1408. 1409. 1410. 1411. 1412. 1413. 1414. 1415. 1416. 1417. 1418. 1419. 1420. 1421. 1422. 1423. 1424. 1425. 1426. 1427. 1428. 1429. 1430. 1431. 1432. 1433. 1434. 1435. 1436. 1437. 1438. 1439. 1440. 1441. 1442. 1443. 1444. 1445. 1446. 1447. 1448. 1449. 1450. 1451. 1452. 1453. 1454. 1455. 1456. 1457. 1458. 1459. 1460. 1461. 1462. 1463. 1464. 1465. 1466. 1467. 1468. 1469. 1470. 1471. 1472. 1473. 1474. 1475. 1476. 1477. 1478. 1479. 1480. 1481. 1482. 1483. 1484. 1485. 1486. 1487. 1488. 1489. 1490. 1491. 1492. 1493. 1494. 1495. 1496. 1497. 1498. 1499. 1500. 1501. 1502. 1503. 1504. 1505. 1506. 1507. 1508. 1509. 1510. 1511. 1512. 1513. 1514. 1515. 1516. 1517. 1518. 1519. 1520. 1521. 1522. 1523. 1524. 1525. 1526. 1527. 1528. 1529. 1530. 1531. 1532. 1533. 1534. 1535. 1536. 1537. 1538. 1539. 1540. 1541. 1542. 1543. 1544. 1545. 1546. 1547. 1548. 1549. 1550. 1551. 1552. 1553. 1554. 1555. 1556. 1557. 1558. 1559. 1560. 1561. 1562. 1563. 1564. 1565. 1566. 1567. 1568. 1569. 1570. 1571. 1572. 1573. 1574. 1575. 1576. 1577. 1578. 1579. 1580. 1581. 1582. 1583. 1584. 1585. 1586. 1587. 1588. 1589. 1590. 1591. 1592. 1593. 1594. 1595. 1596. 1597. 1598. 1599. 1600. 1601. 1602. 1603. 1604. 1605. 1606. 1607. 1608. 1609. 1610. 1611. 1612. 1613. 1614. 1615. 1616. 1617. 1618. 1619. 1620. 1621. 1622. 1623. 1624. 1625. 1626. 1627. 1628. 1629. 1630. 1631. 1632. 1633. 1634. 1635. 1636. 1637. 1638. 1639. 1640. 1641. 1642. 1643. 1644. 1645. 1646. 1647. 1648. 1649. 1650. 1651. 1652. 1653. 1654. 1655. 1656. 1657. 1658. 1659. 1660. 1661. 1662. 1663. 1664. 1665. 1666. 1667. 1668. 1669. 1670. 1671. 1672. 1673. 1674. 1675. 1676. 1677. 1678. 1679. 1680. 1681. 1682. 1683. 1684. 1685. 1686. 1687. 1688. 1689. 1690. 1691. 1692. 1693. 1694. 1695. 1696. 1697. 1698. 1699. 1700. 1701. 1702. 1703. 1704. 1705. 1706. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. 1712. 1713. 1714. 1715. 1716. 1717. 1718. 1719. 1720. 1721. 1722. 1723. 1724. 1725. 1726. 1727. 1728. 1729. 1730. 1731. 1732. 1733. 1734. 1735. 1736. 1737. 1738. 1739. 1740. 1741. 1742. 1743. 1744. 1745. 1746. 1747. 1748. 1749. 1750. 1751. 1752. 1753. 1754. 1755. 1756. 1757. 1758. 1759. 1760. 1761. 1762. 1763. 1764. 1765. 1766. 1767. 1768. 1769. 1770. 1771. 1772. 1773. 1774. 1775. 1776. 1777. 1778. 1779. 1780. 1781. 1782. 1783. 1784. 1785. 1786. 1787. 1788. 1789. 1790. 1791. 1792. 1793. 1794. 1795. 1796. 1797. 1798. 1799. 1800. 1801. 1802. 1803. 1804. 1805. 1806. 1807. 1808. 1809. 1810. 1811. 1812. 1813. 1814. 1815. 1816. 1817. 1818. 1819. 1820. 1821. 1822. 1823. 1824. 1825. 1826. 1827. 1828. 1829. 1830. 1831. 1832. 1833. 1834. 1835. 1836. 1837. 1838. 1839. 1840. 1841. 1842. 1843. 1844. 1845. 1846. 1847. 1848. 1849. 1850. 1851. 1852. 1853. 1854. 1855. 1856. 1857. 1858. 1859. 1860. 1861. 1862. 1863. 1864. 1865. 1866. 1867. 1868. 1869. 1870. 1871. 1872. 1873. 1874. 1875. 1876. 1877. 1878. 1879. 1880. 1881. 1882. 1883. 1884. 1885. 1886. 1887. 1888. 1889. 1890. 1891. 1892. 1893. 1894. 1895. 1896. 1897. 1898. 1899. 1900. 1901. 1902. 1903. 1904. 1905. 1906. 1907. 1908. 1909. 1910. 1911. 1912. 1913. 1914. 1915. 1916. 1917. 1918. 1919. 1920. 1921. 1922. 1923. 1924. 1925. 1926. 1927. 1928. 1929. 1930. 1931. 1932. 1933. 1934. 1935. 1936. 1937. 1938. 1939. 1940. 1941. 1942. 1943. 1944. 1945. 1946. 1947. 1948. 1949. 1950. 1951. 1952. 1953. 1954. 1955. 1956. 1957. 1958. 1959. 1960. 1961. 1962. 1963. 1964. 1965. 1966. 1967. 1968. 1969. 1970. 1971. 1972. 1973. 1974. 1975. 1976. 1977. 1978. 1979. 1980. 1981. 1982. 1983. 1984. 1985. 1986. 1987. 1988. 1989. 1990. 1991. 1992. 1993. 1994. 1995. 1996. 1997. 1998. 1999. 2000. 2001. 2002. 2003. 2004. 2005. 2006. 2007. 2008. 2009. 2010. 2011. 2012. 2013. 2014. 2015. 2016. 2017. 2018. 2019. 2020. 2021. 2022. 2023. 2024. 2025. 2026. 2027. 2028. 2029. 2030. 2031. 2032. 2033. 2034. 2035. 2036. 2037. 2038. 2039. 2040. 2041. 2042. 2043. 2044. 2045. 2046. 2047. 2048. 2049. 2050. 2051. 2052. 2053. 2054. 2055. 2056. 2057. 20*

ten podkreśla, że na lekcji zasad muzyki ucząc się o alikwotach, częstotliwości, interwałach, trójdźwiękach oraz czterodźwiękach wykorzystywał wiedzę z matematyki. Kolejnym ciekawym przykładem jest odpowiedź ucznia o numerze 16. Uczeń ten również zaznaczył, że wykorzystywał wiedzę z matematyki przy uczeniu się o alikwotach. Uczeń napisał: „Tak, zauważyłam, że odległości między dźwiękami są zapisywane za pomocą liczb. Żeby osiągnąć alikwoty od danego dźwięku, strunę skraca się w , potem w , potem w , to też jest wykorzystywanie wiedzy matematycznej”. (Rys. 4.5.):

1) Czy na lekcjach historii muzyki lub zasad muzyki wykorzystywałeś lub zauważyłeś wiedzę z matematyki?

<input checked="" type="checkbox"/> TAK	<input type="checkbox"/> NIE
---	------------------------------

Jeśli TAK, w jaki sposób?

Tak, zauważyłam, że odległości między dźwiękami są zapisywane za pomocą liczb. Żeby osiągnąć alikwoty od danego dźwięku, strunę skraca się w  $\frac{1}{2}$ , potem w  $\frac{1}{4}$ , potem w  $\frac{1}{8}$  - to też jest wykorzystywanie wiedzy matematycznej.

RYSUNEK 4.5. Odpowiedź ucznia numer 16.

Uczniowie ci, wyraźnie wskazują, że muzyka jest ściśle powiązana z matematyką.

Na pytanie drugie, uczeń o numerze 15 jako jedyny odpowiedział „TAK”. Poniżej prezentuję wypowiedź tego ucznia (Rys. 4.6.):

2) Czy podczas rozwiązywania zadań z matematyki wykorzystywałeś wiedzę z muzyki?

<input checked="" type="checkbox"/> TAK	<input type="checkbox"/> NIE
---	------------------------------

Jeśli TAK, w jaki sposób?

Tylko (prosty przykład) przy utwórkach, porównywanam je do interwałów.

RYSUNEK 4.6. Odpowiedź na drugie pytanie ucznia numer 15.

Uczeń ten, wykorzystywał wiedzę muzyczną podczas rozwiązywania zadań z matematyki. Sugeruje to zatem ważną rolę, jaką pełni ukazywanie na lekcjach analogii zachodzących między matematyką a muzyką.

Uczniowie, którzy zaznaczyli odpowiedź „TAK” w pytaniu 3 wskazywali, że:

- matematyka i muzyka są przedmiotami ściślymi,
- zachodzi związek pomiędzy rytmem a matematyką,
- częstotliwość związana jest z matematyką.

Na kolejnym rysunku prezentuję odpowiedź ucznia o numerze 5 (Rys. 4.7.).

3) Czy dostrzegasz jakieś podobne cechy, analogie między matematyką a muzyką?

TAK  NIE

Jeśli TAK, to wymień:

• nie wiem jak to zabrzmieć, ale np. w wyrażaniu dźwięków liczby, zarówno jeżeli chodzi o interwały, jak i o dźwięki w Hz ( $a_1 = 440/1s$ ), kiedy liczby względem siebie rosną wprostproporcjonalnie, to dźwięki (w jakimś interwale) idą również równolegle, rozwiązywanie interwałów (albo równolegle w górę, albo jeden jak i drugi dźwięk idą o tyle samo, jeden w górę, drugi w dół), rozwiązania D7, D9

RYSUNEK 4.7. Odpowiedź na trzecie pytanie ucznia numer 5.

Uczeń o numerze 15 napisał: „Nie wiem jak to zabrzmieć, ale np. w wyrażaniu dźwięków liczby, zarówno jeżeli chodzi o interwały, jak i o dźwięki w Hz ( $a_1 = 440/1s$ ), kiedy liczby względem siebie rosną wprostproporcjonalnie, to dźwięki (w jakimś interwale) idą również równolegle, rozwiązywanie interwałów (albo równolegle w górę, albo jeden jak i drugi dźwięk idą o tyle samo, jeden w górę, drugi w dół), rozwiązania D7, D9”.

W kwestionariuszu tym uczniowie wskazali jeszcze na jedną bardzo ważną kwestię, a mianowicie rozwój pamięci przez muzykę. Poniżej załączam wypowiedzi dwóch uczniów, poruszających ten problem.

Oto odpowiedź ucznia o numerze 3 (Rys. 4.8.):

4) Jak myślisz, czy nauka muzyki może mieć wpływ na naukę matematyki?

TAK  NIE

Jeśli TAK, to wymień:

Na muzyce rozwija się pamięć i inteligencję, to przydaje się do nauki matematyki

RYSUNEK 4.8. Odpowiedź na czwarte pytanie ucznia numer 3.

Uczeń ten napisał: „Na muzyce rozwija się pamięć i inteligencję, to przydaje się do nauki matematyki”.

Poniżej prezentuję odpowiedź ucznia o numerze 5 (Rys. 4.9.):

5) Jak myślisz, czy nauka matematyki może mieć wpływ na naukę muzyki?

TAK  NIE

Jeśli TAK, to wymień:

W czasie budowania wielodźwięków oraz kompozycji matematyka bardzo się przydaje

RYSUNEK 4.9. Odpowiedź na piąte pytanie ucznia numer 5.

Bad. możliwości wykorzystania muz. w naucz. sym. os. i środ. na poz. szk. podst. [35]

Uczeń ten napisał: „W czasie budowania wielodźwięków oraz zapisu kompozycji matematyka bardzo się przydaje”. Z wypowiedzi ucznia dowiadujemy się, że nauka matematyki może mieć wpływ na naukę muzyki.

#### 4.3.3. Analiza kwestionariuszy: nauczyciela matematyki oraz nauczyciela zasad muzyki

W podrozdziale tym prezentuję odpowiedzi nauczycieli, jakie udzielili w kwestionariuszach.

Na podstawie kwestionariuszy chciałam uzyskać informacje, czy nauczyciele pokazywali uczniom analogie zachodzące między matematyką a muzyką oraz czy w szkołach muzycznych wykorzystuje się analizę utworu muzycznego jako model kształtowania rozumienia matematycznego pojęcia symetrii osiowej i środkowej.

Oto odpowiedź nauczyciela matematyki (Rys. 4.10.):

*Szanowna Pani. Szanowny Panie,  
Jestem studentką Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie. Prowadzę badania nad tym, czy może pomóc uczniom w zrozumieniu matematyki.  
Bardzo mi zależy na wyrażeniu Pana/Pani opinii i uzupełnieniu kwestionariusza, który jest anonimowy i będzie wykorzystany wyłącznie w celach naukowych.  
Dziękuję bardzo za udział w badaniu.  
Paulina Fras*

### KWESTIONARIUSZ DLA NAUCZYCIELA MATEMATYKI KLASY VII

1) Czy na lekcjach o symetrii osiowej lub środkowej odwoływał(a) się Pan(i) do pojęć muzycznych?

TAK  NIE

Jeśli TAK, to:

A) czy podczas wprowadzania pojęcia symetrii osiowej lub środkowej?

TAK  NIE

Jeśli TAK to w jaki sposób?

B) czy podczas rozwiązywania zadań z symetrii osiowej lub środkowej?

TAK  NIE

Jeśli TAK to w jaki sposób?

2) Czy zauważył(a) Pan(i), aby uczniowie samodzielnie dostrzegali analogie zachodzące między przekształceniami geometrycznymi i przekształceniami melodii?

TAK  NIE

RYSUNEK 4.10. Odpowiedź nauczyciela matematyki.

Analizując odpowiedzi nauczyciela matematyki zauważamy, że temat: symetria osiowa i symetria środkowa nie był wprowadzany za pomocą pojęć muzycznych oraz na kolejnych lekcjach z tych tematów nauczyciel nie odwoływał się do przekształceń melodii.

Oto odpowiedź nauczyciela zasad muzyki (Rys. 4.11.):

*Szanowna Pani, Szanowny Panie,*  
*Jestem studentką Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie. Prowadzę badania nad tym, czy muzyka może pomóc uczniom w zrozumieniu matematyki.*  
*Bardzo mi zależy na wyrażeniu Pana/Pani opinii i uzupełnieniu kwestionariusza, który jest anonimowy i będzie wykorzystany wyłącznie w celach naukowych.*  
*Dotęknę bardzo za udział w badaniu.*  
*Paulina Fraś*

**KWESTIONARIUSZ DLA NAUCZYCIELA  
 ZASAD MUZYKI KLASY VII**

1) Czy Pan(i) pokazywał(a) uczniom połączenia pomiędzy przekształceniem melodii względem inwersji, raka a symetrią osiową oraz inwersją raka a symetrią środkową?

TAK  NIE

Jeśli TAK, to:

A) czy podczas wprowadzania przekształceń melodii?

TAK  NIE

Jeśli TAK to w jaki sposób?

B) czy podczas wykonywania ćwiczeń z przekształceń melodii?

TAK  NIE

Jeśli TAK to w jaki sposób?

2) Czy zauważył(a) Pan(i), aby uczniowie samodzielnie dostrzegali analogie zachodzące między przekształceniami geometrycznymi i przekształceniami melodii?

TAK  NIE

→ dostrzegali inne zależności między materiałem dźwiękowym a relacjami matematycznymi (dyktanda)

→ połączenie matematyki i muzyki było pokazane jedynie przy budowaniu interwałów, przy budowie alikwotów; podczas nauki o częstotliwości

RYSUNEK 4.11. Odpowiedź nauczyciela zasad muzyki.

Nauczyciel w kwestionariuszu na pytanie drugie odpowiedział „TAK” oraz napisał, że uczniowie „dostrzegali inne zależności między materiałem dźwiękowym a relacjami matematycznymi (dyktanda)” oraz „połączenie matematyki i muzyki było pokazywane jedynie przy budowaniu interwałów, przy budowie alikwotów; podczas nauki o częstotliwości”.

Nauczyciel zasad muzyki nie pokazywał zależności pomiędzy przekształceniami melodii, a symetrią środkową i osiową. Jedynie zauważył, że uczniowie dostrzegają związek matematyki z muzyką przy budowie interwałów, oraz przy analizie częs-

totliwości poszczególnych dźwięków. Podkreślił również, że uczniowie dostrzegali zależności pomiędzy materiałem dźwiękowym a relacjami matematycznymi.

Na podstawie tych kwestionariuszy uzyskałam informację, że nauczyciele nie pokazywali uczniom analogii zachodzących między matematyką a muzyką. Nie prezentowali również związku symetrii osiowej i środkowej z przekształceniami melodii.

## **5. Badanie zasadnicze – metodologia, narzędzia badawcze, organizacja i opis realizacji, wyniki badań i ich analiza**

### **5.1. Metodologia, organizacja i przebieg badania**

W badaniu zasadniczym uczniowie pracowali nad zadaniami z symetrii środkowej i osiowej oraz nad znajdowaniem analogii pomiędzy tymi zagadnieniami, a przekształceniami melodii względem inwersji, raka, inwersji raka. W tym rozdziale udzielam odpowiedzi na następujące pytania:

- Jakie błędy towarzyszą uczniom z zakresu symetrii środkowej i osiowej?
- Jak można zaprojektować nauczanie przekształceń geometrycznych – takich, jak symetria osiowa i środkowa – z wykorzystaniem muzyki?
- Czy wykorzystanie muzyki do nauki symetrii osiowej i symetrii środkowej jest skuteczne?
- Czy w szkołach muzycznych można wykorzystać przekształcenia melodii jako nowy model kształtowania u uczniów przekształceń geometrycznych?
- Czy uczniowie potrafią wykorzystać w zadaniach z symetrii osiowej i symetrii środkowej transfer wiedzy pomiędzy tymi przekształceniami, a przekształceniami melodii?
- Czy uczniowie potrafią skorygować swoje błędy z zakresu symetrii środkowej i osiowej po zaprezentowaniu analogii tych zagadnień z przekształceniami melodii?

Drugi etap badania podzieliłam na 3 części. Do tego etapu przystąpiło łącznie 17 uczniów.

W pierwszej części tego etapu uczniowie wypełnili ARKUSZ 1 w ramach lekcji religii, która trwała 45 minut. Ta karta pracy zawierała zadania matematyczne dotyczące symetrii osiowej i środkowej. W dalszej części pracy prezentuję ten arkusz i dokładniej omawiam. Do tej części badania przystąpiło 14 uczniów. Przed rozpoczęciem lekcji rozdałam uczniom karty pracy do wypełnienia i przypomniałam, iż ich praca nie będzie podlegała ocenie. Poprosiłam uczniów, aby samodzielnie wypełnili wszystkie znajdujące się w karcie zadania.

Następnie przeprowadziłam lekcję o symetrii w muzyce w ramach lekcji wychowawczej. Lekcja trwała 45 minut i uczestniczyło w niej 16 uczniów. Przedstawiłam przekształcenia melodii względem inwersji, raka i inwersji raka oraz zaprezentowałam uczniom połączenie tych przekształceń z symetrią osiową oraz środkową.

Formulowałam wskazówki oraz pytania pomocnicze, które miały na celu ułatwienie odkrycia tych zależności.

Po przeprowadzonej lekcji uczniowie rozwiązyli zadania z ARKUSZA 2. Do tej części badania przystąpiło łącznie 16 uczniów. Badani napisali ten test w ramach lekcji religii, która trwała 45 minut.

## 5.2. Wyniki badań oraz ich analiza

### 5.2.1. Cele zadań z kart pracy ARKUSZ 1 i ARKUSZ 2

W tym podrozdziale przedstawiam cele poszczególnych zadań z karty pracy ARKUSZ 1 i ARKUSZ 2:

TABELA 5.1. Cele poszczególnych zadań z karty pracy ARKUSZ 1 i ARKUSZ 2

ARKUSZ 1	ARKUSZ 2	Cele zadania
Zadanie 1, 2, 14, 15, 23		Uczeń potrafi rozpoznać na rysunku figury, które są symetryczne względem prostej (w położeniu poziomym lub pionowym) lub względem punktu.
Zadanie 3, 4		Uczeń potrafi narysować figury symetryczne względem prostej oraz względem danego punktu.
Zadanie 5		Uczeń potrafi narysować oś symetrii figury oraz rozstrzygnąć, gdy ona nie istnieje.
Zadanie 6, 7, 8		Uczeń potrafi zaznaczyć w układzie współrzędnych punkt symetryczny względem osi OX, OY oraz względem początku układu współrzędnych.
Zadanie 9		Uczeń potrafi podać współrzędne punktu przekształconego względem osi OX, OY oraz względem początku układu współrzędnych.
Zadanie 10		Uczeń potrafi rozstrzygnąć, czy narysowana prosta jest osią symetrii figury złożonej z dwóch punktów. Dodatkowo w ARKUSZU 2, uczeń potrafi rozstrzygnąć, czy narysowana prosta jest osią symetrii odcinka.
Zadanie 11	Zadanie 12	Uczeń potrafi narysować oś symetrii, tak aby podane dwa punkty były symetryczne względem siebie.
Zadanie 12	Zadanie 11	Uczeń potrafi rozstrzygnąć, które punkty są swoimi obrazami w symetrii środkowej.
Zadanie 13		Uczeń potrafi określić, czy narysowana prosta jest osią symetrii figury.
Zadanie 16		Uczeń potrafi dorysować oś symetrii figury i rozstrzygnąć jeśli ona nie istnieje.
Zadanie 17		Uczeń potrafi narysować figurę symetryczną do danej względem danego punktu.
Zadanie 18		Uczeń potrafi narysować figurę symetryczną do danej względem danej prostej.

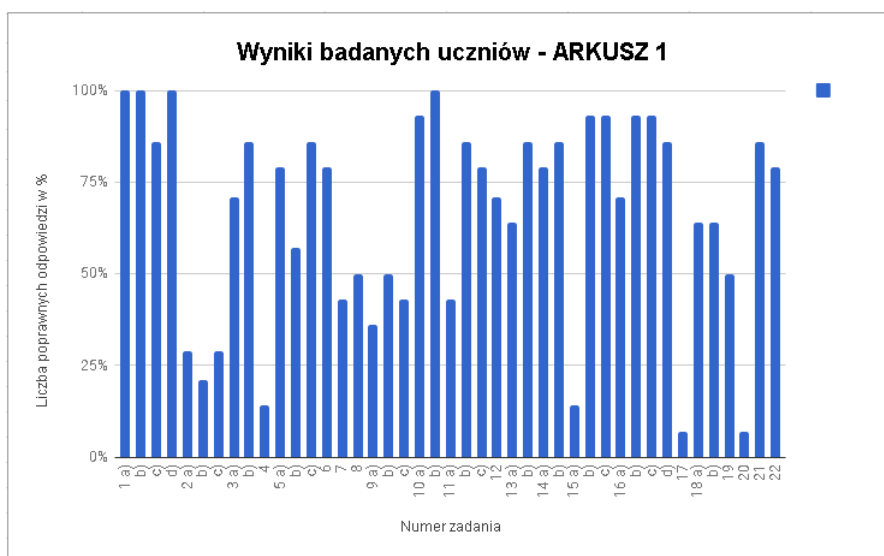


Zadanie 19, 20, 21, 22	Uczeń potrafi narysować oś symetrii i określić ile osi symetrii ma: - odcinek, półprosta, okrąg, kwadrat oraz potrafi do nich dorysować osie symetrii. (ARKUSZ 1), - prosta, półprosta, koło, trójkąt równoboczny. (ARKUSZ 2)
------------------------	---

Ze względu na cel badania i próbę wskazania transferu wiedzy pomiędzy przekształceniami melodii a przekształceniami geometrycznymi zwracamy uwagę na położenie prostej, która jest osią symetrii (poziome i pionowe).

### 5.3. Analiza wyników pierwszej części badania

W tym podrozdziale dokonuję analizy i interpretacji wyników I części badania zasadniczego z wykorzystaniem karty pracy ARKUSZ 1 oraz ARKUSZ 2. Po drugie wyszczególniam i pokrótce charakteryzuję błędy popełnione przez uczniów z zakresu symetrii środkowej i symetrii osiowej. Przedstawiam również odpowiedzi uczniów, które według mnie są najciekawsze. Poniżej załączam wykres przedstawiający liczbę poprawnych odpowiedzi w procentach do każdego zadania z ARKUSZA 1:

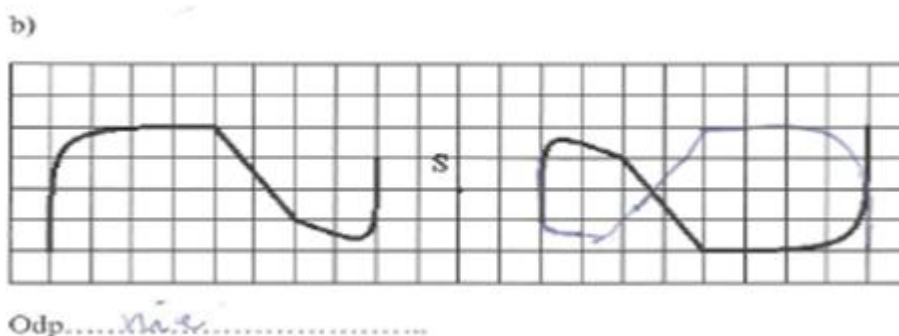


RYSUNEK 5.1. Wyniki ARKUSZA 1.

#### 5.3.1. Błędy w rozumieniu pojęcia symetrii środkowej i osiowej

Podczas szczegółowej analizy odpowiedzi uczniów, w karcie pracy ARKUSZ 1 zauważyłam błędy przede wszystkim w zadaniach dotyczących symetrii środkowej.

Na początku przedstawię błąd, który pojawił się w największej liczbie arkuszy. Aby zobrazować na czym polegał ten błąd zaprezentuję rozwiązanie zadania 2 b) zaproponowane przez jednego ucznia o numerze 14 (Rys. 5.2.):

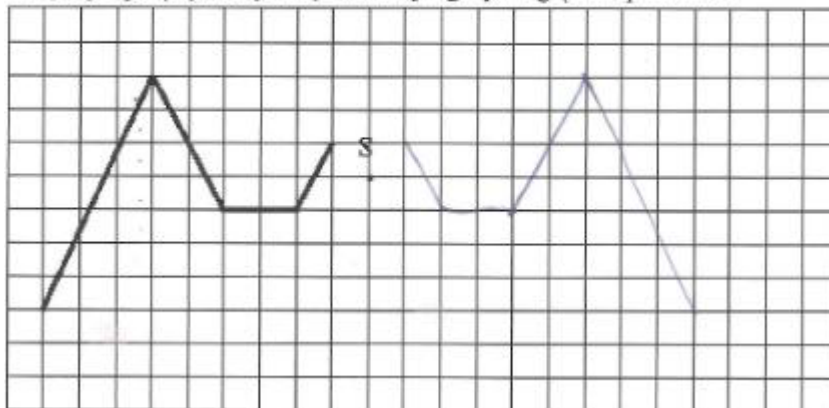


RYSUNEK 5.2. Rozwiązanie zadania 2 b) przez ucznia numer 14.

Jak zauważamy, uczeń ten rozumie przekształcenie względem punktu S tylko jako symetrię względem prostej w pionowym położeniu. Pomija fakt, że symetria środkowa to złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach prostopadłych. Uczeń ten powiela to rozumowanie w innych zadaniach. Na przykład w zadaniu 4 zaproponował odpowiedź (Rys. 5.3.):

#### Zadanie 4

Narysuj figurę symetryczną do danej figury względem punktu S.

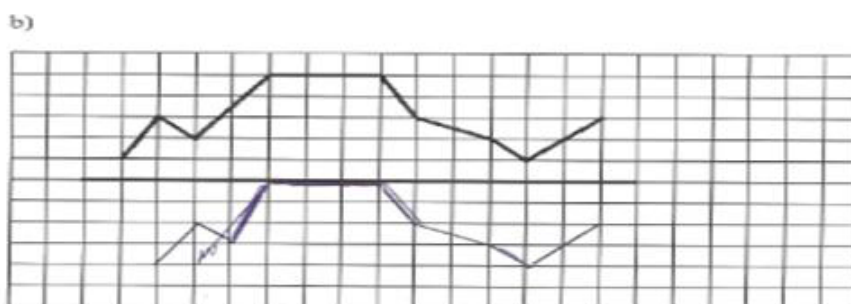


RYSUNEK 5.3. Rozwiązanie zadania 4 przez ucznia numer 14.

Takie rozumowanie pojęcia symetria środkowa można zauważyć również u innych uczniów.

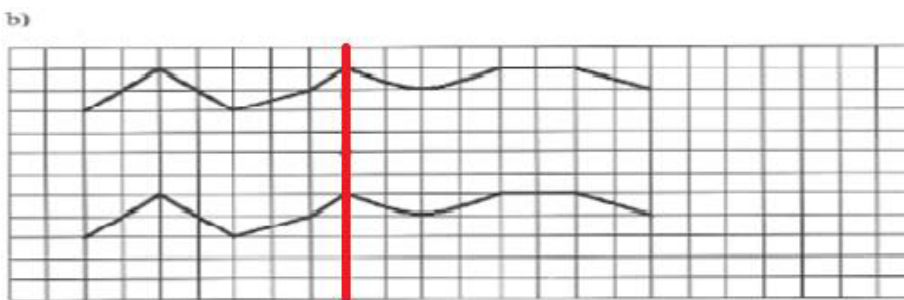
Kolejnym błędem jaki pojawił się w dużej liczbie prac, to trudność w przekształceniu figury względem prostej w poziomym położeniu, a także względem prostej w pionowym położeniu.

Uczeń przekształcając figurę względem prostej w poziomym położeniu rysuje nową figurę w „prawie takim samym” położeniu jak wyglądała figura pierwotna, zapominając między innymi o tym, że wszystkie punkty powinny leżeć w równej odległości od prostej i po jej przeciwnych stronach. Oto propozycja rozwiązania zadania 3b przez ucznia o numerze 10 (Rys. 5.4.):

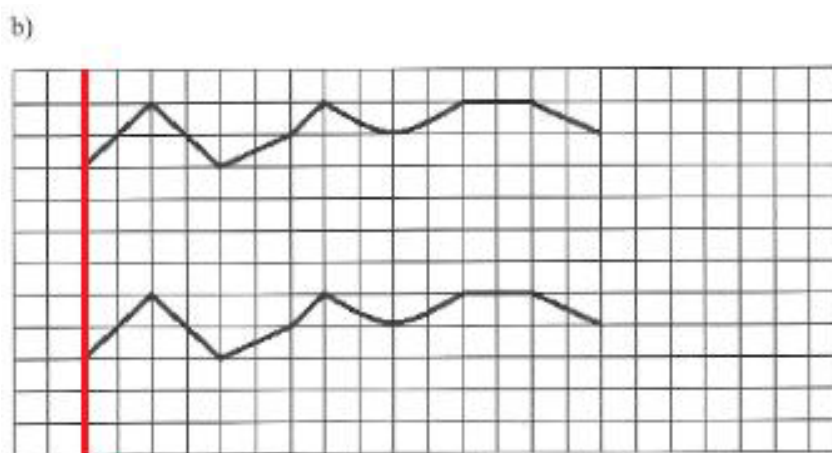


RYSUNEK 5.4. Rozwiązanie zadania 3b przez ucznia numer 10.

Należy jeszcze zwrócić uwagę na błędne rozumienie pojęcia oś symetrii. Odpowiedzi uczniów, które zamieściłam poniżej są dość nietypowe i nie sposób je pominąć. Spójrzmy na odpowiedzi udzielone przez uczniów do zadania 2. Oto rozwiązanie zaproponowane przez ucznia o numerze 4 (Rys. 5.5.)<sup>5</sup>:



RYSUNEK 5.5. Rozwiązanie zadania 2b przez ucznia numer 4.  
oraz ucznia o numerze 12 (Rys. 5.6.):



RYSUNEK 5.6. Rozwiązanie zadania 2b przez ucznia numer 12.

<sup>5</sup>Linią czerwoną zaznaczyłam prostą, którą uczeń dorysował.

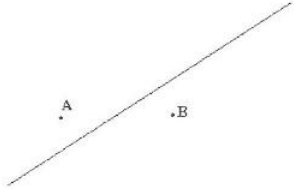
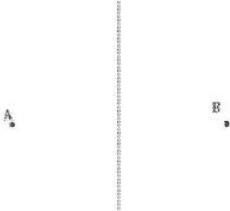
Uczniowie ci rysują dość niezrozumiale oś symetrii figury. Jednak szczegółowa analiza arkuszy tych uczniów nie pozwoliła mi odpowiedzieć na pytanie z czego ten błąd wynika.

Kolejnym błędem również dość oryginalnym, który znalazłam w jednej z prac jest udzielenie w zadaniu 10 a) odpowiedzi „TAK”. Uczeń dostrzega, że narysowana oś jest osią symetrii dla dwóch punktów A i B, gdyż prosta leży pomiędzy dwoma punktami. Uczeń nie zwraca uwagi na to, że jednak oś symetrii powinna być prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty A i B.

Poniżej prezentuję rozwiązanie zadania 10 przez ucznia o numerze 10 (Rys. 5.7.):

### Zadanie 10

Rozstrzygnij, czy narysowana prosta jest osią symetrii dla punktów A i B. Odpowiedź uzasadnij.

a)  b) 

Odp. Jest ponieważ prosta jest pomiędzy punktami A i B.      Odp. Tak, ponieważ prosta jest pomiędzy punktami A i B.

RYSUNEK 5.7. Rozwiązanie zadania 10 przez ucznia numer 10.

Uczeń napisał: „Jest ponieważ prosta jest pomiędzy punktami A i B”.

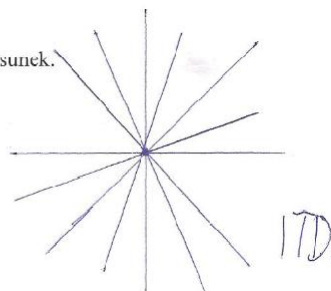
Warto jeszcze przytoczyć jeden błąd w rozumieniu pojęcia symetrii, który dostrzegłam w zadaniu 19 u ucznia o numerze 13 (Rys. 5.8.). Jednak przeglądając kartę pracy tego ucznia nie znalazłam odpowiedzi, dlaczego w ten sposób uczeń rozumie pojęcie osi symetrii.

### Zadanie 19

Ile osi symetrii ma odcinek? Odpowiedź uzasadnij i wykonaj rysunek.

Odp. NIE SKONCZONE WISZE

MOŻNA GO PRZECIĄC NA DWIE  
POŁOWY POD KAŻDYM KĄTEM



RYSUNEK 5.8. Rozwiązanie zadania 19 przez ucznia numer 13.

Szukając przyczyn pojawienia się błędu tego rodzaju doszłam do wniosku, iż uczeń jest przekonany, że oś symetrii figury może być położona pod każdym kątem,

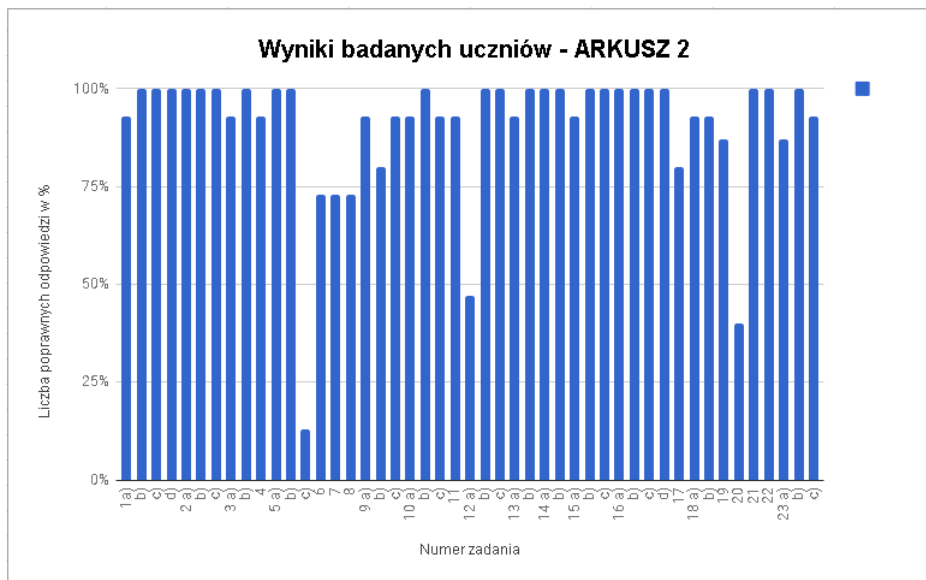
niekoniecznie prostopadle, a jedynym warunkiem uznawanym przez ucznia jest to, że oś symetrii dzieli figurę na „dwie połowy”.

#### 5.4. Analiza wyników III części badania zasadniczego

W tej części pracy dokonuję analizy i interpretacji wyników uzyskanych przez uczniów z wykorzystaniem zadań z ARKUSZA 2. Podejmuję się próby scharakteryzowania najciekawszych odpowiedzi uczniów.

W tym podrozdziale staram się również wywnioskować, czy przeprowadzona lekcja z przekształceń melodii i połączeniem zagadnień: inwersja, raka, inwersja raka z symetrią osiową i symetrią środkową miała wpływ na wyniki uczniów. W niniejszym podrozdziale porównuję wyniki z ARKUSZA 2 i wyniki uzyskane przez uczniów

Poniżej prezentuję wykres przedstawiający liczbę poprawnych odpowiedzi w procentach do każdego zadania z ARKUSZ 2:



RYSUNEK 5.9. Wyniki ARKUSZA 2.

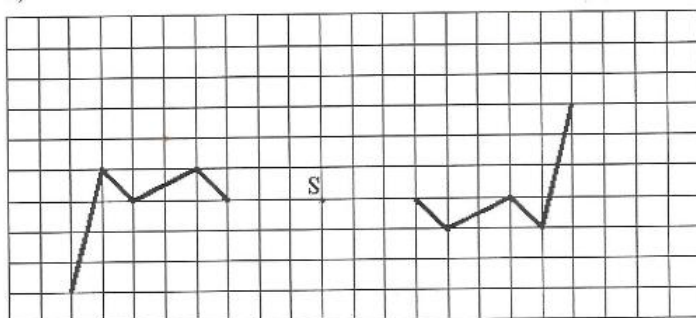
Analizując wykresy przedstawione na Rys. 5.1. i Rys. 5.9. można zauważyć, że badani uczniowie mieli duże trudności z rozwiązaniem zadań z karty pracy ARKUSZ 1, które dotyczyły symetrii środkowej i osiowej. Niewątpliwie po przeprowadzonej lekcji z przekształceń melodii w postaci: inwersji, raka oraz raka inwersji i po ukazaniu analogii tych przekształceń z symetrią osiową oraz z symetrią środkową liczba poprawnych rozwiązań bardzo wzrosła (karta pracy - ARKUSZ 2). W większości zadań uczniowie przekroczyli próg 75% poprawnych odpowiedzi. Co ciekawe kilku uczniów podkreśliło w ARKUSZU 2, że odwołuje się na pojęcia związane z muzyką. Co wskazuje na to, że badani dostrzegają transfer między symetrią osiową, symetrią środkową a przekształceniami melodii w postaci: inwersji, raka, raka inwersji.

Poniżej załączam wypowiedź ucznia numer 1, który podkreślił, że odwołuje się na pojęcia związane z muzyką. Uczeń ten napisał: „Tak, ponieważ jest inwersja raka zastosowana” (Rys. 5.10.):

### Zadanie 2

Rozstrzygnij, czy poniższe rysunki przedstawiają figury symetryczne względem punktu S? Odpowiedź uzasadnij.

a)

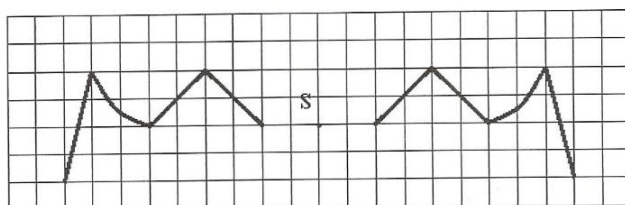


Odp. *Uch. pomylił... jest inwersja raka zastosowana*

RYСУNEK 5.10. Odpowiedź do zadania 2a) udzielona przez ucznia numer 1.

oraz przykład uzasadnienia tego samego ucznia na to, że figury nie są symetryczne względem punktu S. Uczeń napisał: „Nie ponieważ jest tylko przekształcenie raka zastosowane” (Rys. 5.11.):

c)



Odp. *Uch. ... inwersja jest, tylko przekształcenie raka zastosowane*

RYСУNEK 5.11. Odpowiedź do zadania 2a) udzielona przez ucznia numer 1.

## 6. Podsumowanie

Celem niniejszej pracy było badanie wykorzystania muzyki do nauki matematyki na przykładzie przekształceń geometrycznych, a w szczególności poszukiwanie odpowiedzi na następujące pytania:

- Czy uczniowie szkoły muzycznej, nauczyciel matematyki i nauczyciel zasad muzyki zauważają związki między matematyką a muzyką? Czy widzą możliwość wykorzystania transferu wiedzy między matematyką a muzyką? Jeśli tak, to czy są stosowane wzajemne odwołania na lekcjach obu przedmiotów?
- Jak można zaprojektować lekcję o przekształceniach geometrycznych – takich, jak symetria osiowa i środkowa – z wykorzystaniem muzyki? Czy taka propozycja dydaktyczna jest możliwa do realizacji?
- Czy ukazanie modelu transformacji melodii w nauczaniu przekształceń geometrycznych może być skuteczne? Czy uczniowie szkoły muzycznej potrafią skorygować swoje błędy z zakresu symetrii środkowej i osiowej po zaprezentowaniu związku tych przekształceń geometrycznych z transformacjami melodii?

Analiza arkuszy uczniów i przeprowadzonej przeze mnie lekcji udzieliły mi odpowiedzi na każde z tych pytań w postaci następujących wniosków:

#### WNIOSEK 6.1

*Wydawać by się mogło, iż uczniowie uczęszczający do szkoły muzycznej będą posiadać dominującą inteligencję muzyczną. Jednak analiza testów dostarczyła informacji, że dominującą inteligencją wśród badanych uczniów była w tej grupie inteligencja interpersonalna. Psycholog Howard Gardner podkreślił fakt, że niekoniecznie uczeń uczęszczający do szkoły muzycznej będzie posiadać dominującą inteligencję muzyczną, gdyż na przykład dyrygent musi się odznaczać w dużej mierze inteligencją interpersonalną, a wszystkie inteligencje są ze sobą połączone i od siebie zależne. Każdą inteligencję można, więc kształtować za pomocą innej inteligencji. Biorąc pod uwagę powyższe rozważania, możemy stwierdzić, że możliwe jest na przykład wykorzystanie przekształceń melodii do nauki symetrii osiowej i środkowej – szczególnie u tych uczniów, którzy mają bardziej rozwiniętą inteligencję muzyczną niż matematyczno-logiczną.*

#### WNIOSEK 6.2

*Na lekcjach nauczyciele nie prezentowali zależności między matematyką a muzyką. W kwestionariuszu nauczyciel zasad muzyki podkreślił, że uczniowie sami dostrzegają połączenie tych dwóch dziedzin przy budowaniu interwałów oraz przy analizie częstotliwości poszczególnych dźwięków. Analiza kwestionariuszy pokazała, że na lekcjach matematyki i muzyki symetria środkowa i osiowa nie była łączona z przekształceniami melodii w postaci: inwersji, raka, inwersji raka.*

#### WNIOSEK 6.3

*Na podstawie udzielonych odpowiedzi przez uczniów w kwestionariuszu okazuje się, że uczniowie sami dostrzegają pewne zależności między matematyką a muzyką. Badani uczniowie wskazywali, że zachodzi związek między dodawaniem ułamków zwykłych a wartościami nut. Często pojawiającym się przykładem w pracach uczniów było wykorzystanie wiedzy matematycznej do budowy interwałów oraz trójdźwięków.*

## WNIOSEK 6.4

Badani uczniowie przed przeprowadzeniem lekcji o przekształceniach melodii w postaci: inwersji, raka, inwersji raka i ukazaniu analogii zachodzących między tymi zagadnieniami a symetrią środkową i symetrią osiową mieli trudność z rozumieniem pojęć: symetria środkowa i symetria osiowa. Błędem, jaki często się pojawiał w pracach uczniów (ARKUSZ 1) to narysowanie figury w nieodpowiednim przekształceniu. Uczniowie rysując figurę symetryczną względem punktu (symetria środkowa) często przekształcali figurę tylko względem prostej w pionowym położeniu. Większość uczniów również rozumiała pojęcie osi symetrii, jako prostej pomiędzy dwoma punktami. Badani zapominali, że dwa punkty są symetryczne do siebie względem pewnej prostej  $l$ , jeżeli leżą na prostej prostopadłej do prostej  $l$ , leżą po przeciwnych stronach prostej  $l$  oraz są równoodległe od prostej  $l$ . Dużą trudność zauważyłam również w zadaniu, gdzie należało podać współrzędne punktu, który jest symetryczny do danego punktu względem osi  $OX$ ,  $OY$  oraz względem punktu  $(0,0)$ . Uczniowie podawali nieodpowiednie współrzędne.

## WNIOSEK 6.5

Lekcja, którą przeprowadziłam w klasie VII miała między innymi na celu ukazanie uczniom analogii zachodzących między przekształceniami melodii a symetrią osiową i środkową. Przeprowadzona lekcja dostarczyła jednocześnie bardzo cenny wniosek. Uczniowie potrafią skorygować swoje błędy z zakresu symetrii środkowej i osiowej po zaprezentowaniu połączeń tych zagadnień z przekształceniami melodii. Szczegółowa analiza wyników ARKUSZA 1 pokazała, iż badani uczniowie mieli duże trudności z rozwiązaniem zadań z tej karty pracy, które dotyczyły symetrii środkowej i osiowej. Jednak po przeprowadzonej lekcji i połączeniu tych zagadnień z przekształceniami melodii uczniowie poprawili swoje wyniki rozwiązując zadania z ARKUSZA 2. Tylko nieliczne zadania z ARKUSZA 2 sprawiły uczniom trudność. Niemniej jednak okazało się, że przeprowadzona lekcja i ukazanie analogii pomiędzy przekształceniami melodii a symetrią środkową i osiową wpłynęła na poprawę wyników uczniów oraz na sposób rozumienia tych przekształceń geometrycznych. Uczniowie udzielając odpowiedzi w ARKUSZU 2 spontanicznie podkreślali, że odwołują się do zagadnień muzycznych. Okazuje się, że uczniowie zastosowali transfer wiedzy pomiędzy symetrią osiową i symetrią środkową, a przekształceniami melodii w postaci: inwersji, raka i inwersji raka. Powtórzenie wiadomości na temat symetrii środkowej i osiowej z wykorzystaniem przekształceń melodii okazało się być bardzo skuteczne. Przeprowadzona lekcja pokazała, że w szkołach muzycznych można wykorzystać przekształcenia melodii jako nowy model do kształtowania rozumienia matematycznego pojęcia symetrii osiowej i środkowej.

**Literatura**

- [1] J. Arbones, P. Milrud, *Harmonia tkwi w liczbach. Muzyka i matematyka*, wyd. Świat jest matematyczny, 2012.
- [2] A. Brożek, *Symetria w muzyce - czyli o pierwiastku racjonalnym w komponowaniu dzieł muzycznych*, wyd. OBI, 2004.
- [3] I. Lindstend, *Wprowadzenie do teorii zbiorów klas wysokości dźwięku Allena Forte'a*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, 2004.



Bad. możliwości wykorzystania muz. w naucz. sym. os. i środ. na poz. szk. podst. [47]

- [4] W. Wiesław, *Liczby i geometria*, 2. Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1996.
- [5] <https://kawiarniaszkocka.matmatic.pl/blog/2017/1/24/matematyka-w-muzyce,04.03.2018>.

<sup>1</sup>*Institut Matematyki  
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie  
ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków  
E-mail: paulinka77710@gmail.com*

*Przysłano: 30.12.2018; publikacja on-line: 3.05.2019.*