Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 5 (2019), 49-57

Prace Koła Matematyków Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2019)

Maciej Zięba[1]

O pewnych hiperbolach stowarzyszonych z trójkątem

Streszczenie. W tym artykule skupimy uwagę na szczególnych krzywych drugiego stopnia stowarzyszonych z trójkątem. Będziemy korzystać z reprezentacji krzywej drugiego stopnia w postaci równania drugiego stopnia dwóch niewiadomych oraz w postaci macierzowej. Głównym celem jest wskazanie pewnych interesujących i według naszej wiedzy nowych, hiperboli związanych z trójkątem.

Abstract. In this article, we will focus on selected conics associated with a triangle. We will use interchangeably that a conic is a set of zeroes of a degree two polynomial and that it can be written in the matrix form. Our main purpose is to identify certain interesting and according to the best of our knowledge new, hyperbolae associated to a triangle.

1. Wstęp

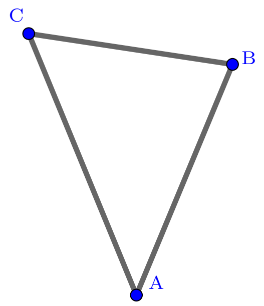
Na każdym trójkącie można opisać okrąg. Podobnie w każdy trójkąt można wpisać okrąg. Te okręgi są wyznaczone jednoznacznie. Gdyby rozważać elipsy wpisane i opisane na trójkącie, to w obu przypadkach dostaniemy dwuparametrową rodzinę krzywych.

Steiner [5] zauważył, że wśród elips wpisanych w trójkąt, elipsa o największym polu ma tę dodatkową ciekawą własność, że jest styczna do boków trójkąta w ich środkach.

W tej pracy zajmiemy się pewną 1-parametrową rodziną elips, które są styczne do (przedłużeń) boków trójkąta i których środki generują inną krzywą stożkową, hiperbolę, która również jest wyznaczona jednoznacznie przez trójkąt. Hiperbola ta ma ponadto tę ciekawą własność, że przechodzi przez środki okręgu wpisanego, okręgów dopisanych do trójkąta i przez środki odcinków, które nazywamy uogól-

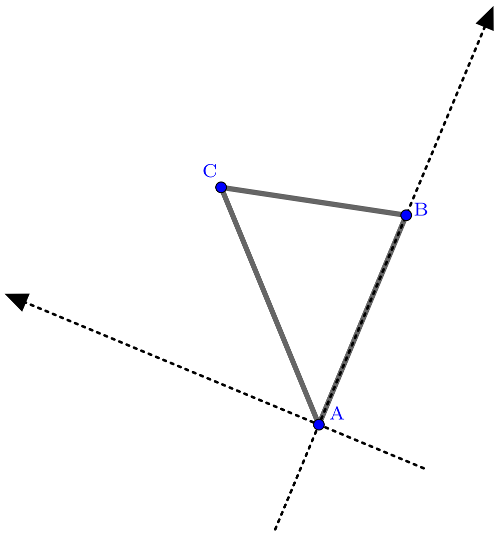
AMS (2010) Subject Classification: 51A20, 14H50.
Słowa kluczowe: hiperbola, trójkąt.
[2] *About some hyperbolas associated with the triangle*

nionymi wysokościami wyjściowego trójkąta. Niech dany będzie trójkąt ABC na płaszczyźnie.



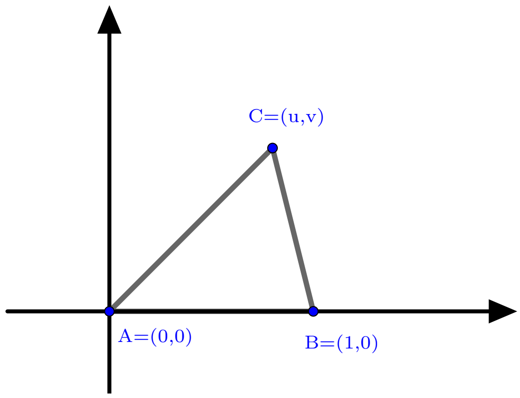
Rysunek 1

Dobieramy układ współrzędnych tak, aby jego początek był w punkcie A, a punkt $(1, 0)$ odpowiada punktowi B oraz by wierzchołek C leżał w półpłaszczyźnie, gdzie druga współrzędna jest dodatnia, Rysunek 2.



Rysunek 2

Stosując translację, obrót i jednokładność o środku w punkcie A mamy zatem sytuacje jak na Rysunku 3. Współrzędne punktu $C = (u, v)$ spełniają warunki $0 \leq u$ oraz $v > 0$.



Rysunek 3

2. Krzywe Stożkowe

Każdą stożkową można zapisać w postaci macierzowej równaniem

$$\begin{bmatrix} x \ y \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \tag{2.1}$$

Oznaczmy przez

$$P = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

macierz w powyższym równaniu, a przez

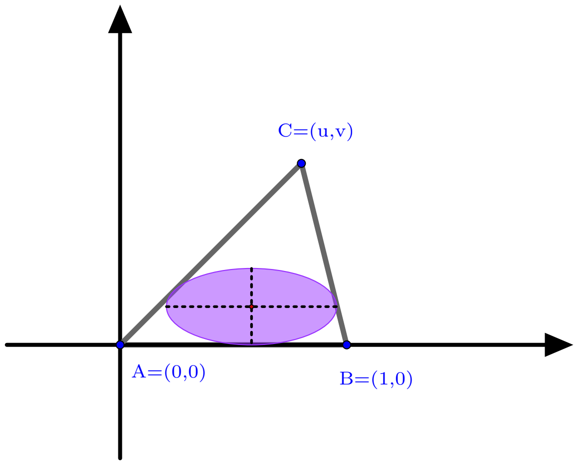
$$R = \begin{bmatrix} a & d \\ d & b \end{bmatrix}$$

tzw. małą macierz stożkowej. Wówczas (2.1) opisuje elipsę wtedy i tylko wtedy, gdy stożkowa jest niezdegenerowana tzn. $\det P \neq 0$ oraz spełniony jest warunek $\det R > 0$, patrz [4].

Jesteśmy zainteresowani elipsami spełniającymi następujące warunki:

(W1) są styczne do prostych zawierających boki trójkąta ABC;

(W2) jedna z ich osi jest równoległa do podstawy trójkąta AB.



Rysunek 4

Przykładowa elipsa spełniająca te warunki przedstawiona jest na Rysunku 4.

Zauważmy, że warunki (W1) i (W2) spełnia okrąg wpisany w trójkąt. Istotnie, jest on szczególnym przypadkiem elipsy, jest styczny do boków trójkąta oraz nie ma wyróżnionych osi, a zatem warunek (W2) jest automatycznie spełniony.

3. Własność elips spełniających warunki (W1) i (W2)

Zauważmy, że geometryczne warunki (W1) oraz (W2) są algebraiczne jako warunki na współczynniki macierzy P.

Wiadomo [3], że osie elipsy są równoległe do wektorów własnych macierzy R. Jeśli jedna z nich ma być równoległa do prostej $y = 0$, to automatycznie druga musi być równoległa do osi $x = 0$, a to oznacza, że współczynnik d macierzy P (oraz oczywiście R) jest równy zero. Zatem warunek (W2) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $d = 0$.

Proste opisujące boki trójkąta zadane są równaniami:

$$\begin{aligned} prAB: &\quad y = 0, \\ prAC: &\quad \frac{v}{u}x - y = 0 \\ prBC: &\quad vx + (1-u)y - v = 0 \end{aligned}$$

Niech

$$g(x, y) = ax^2 + by^2 + c + 2dxy + 2ex + 2fy$$

będzie równaniem elipsy (2.1). Warunek styczności oznacza, że układ równań: prosta i $g(x,y)=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Dla prostej AB mamy zatem układ równań

$$\begin{cases} y=0 \\ ax^2+c+2ex=0 \end{cases}$$

Drugie równanie ma jedno rozwiązanie, gdy jego wyróżnik Δ znika. Stad dostajemy

$$e^2=ac. \tag{3.1}$$

Analogicznie z warunku styczności elipsy i prostej AC dostajemy równanie

$$(eu+fv)^2=c\left(au^2+bv^2+2duv\right). \tag{3.2}$$

Natomiast styczność BC i elipsy prowadzi do równania

$$\begin{split}\Big(-(d+f)^2+ab+bc+2\,be\Big)\,v^2 = \\ 2\left(\left(-d+f\right)e+af-cd\right)(u-1)\,v-(u-1)^2\left(ac-e^2\right).\end{split} \tag{3.3}$$

Interesują nas środki S elips spełniających (3.1),(3.2) i (3.3) oraz warunek $d=0$. Ogólny wzór, zaczerpnięty z [1], na środek S elipsy zadanej równaniem (2.1) jest następujący

$$S=\left(\tfrac{df-be}{ab-d^2},\ \tfrac{de-af}{ab-d^2}\right).$$

Oznaczając współrzędne środka S przez x oraz y, chcemy wyznaczyć zachodzące między nimi zależności. W terminach algebraicznych to oznacza, że z układu równań

$$\begin{cases} x=\frac{df-be}{ab-d^2} \\ y=\frac{de-af}{ab-d^2} \\ d=0 \\ e^2=ac \\ (eu+fv)^2=c\left(au^2+bv^2+2duv\right) \\ \Big(-(d+f)^2+ab+bc+2\,be\Big)\,v^2=2\left(\left(-d+f\right)e+af-cd\right)(u-1)\,v \\ \qquad -(u-1)^2\left(ac-e^2\right) \end{cases}$$

który jest równoważny prostszemu układowi

$$\begin{cases} x=-\frac{e}{a} \\ y=-\frac{f}{b} \\ e^2=ac \\ (eu+fv)^2=c\left(au^2+bv^2\right) \\ \left(ab+bc+2be-f^2\right)v=2f\,(u-1)\,(a+e) \end{cases}$$

mamy wyeliminować zmienne a,b,c,e oraz f. Współrzędne wierzchołka $C=(u,v)$ traktujemy jako parametry. Posłużyliśmy się programem do obliczeń symbolicznych Singular [2] i otrzymaliśmy następującą zależność:

$$2y\,(1-x-u)-v\,(1-2x)=0. \tag{3.4}$$

Równanie (3.4) opisuje stożkową, co jest lepiej widoczne po jego uproszczeniu:

$$-2xy + 2vx + (2 - 2u)y - v = 0.$$

Równanie to w postaci macierzowej wygląda następująco

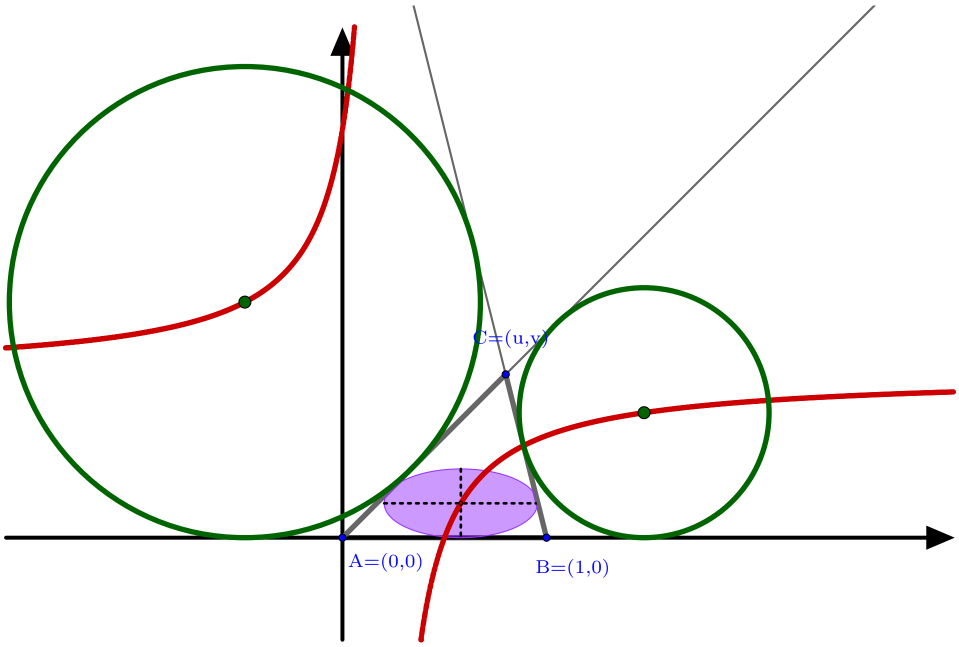
$$\begin{bmatrix} x \ y \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & v \\ -1 & 0 & 1-u \\ v & 1-u & -v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Mała macierz ma wtedy postać

$$R' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Łatwo zauważyć, że $detR' < 0$, a to oznacza, że (3.4) przedstawia hiperbolę. Co więcej jej osie są równoległe do osi rozważanych elips.

Otrzymana hiperbola jest przedstawiona na Rysunku 5.



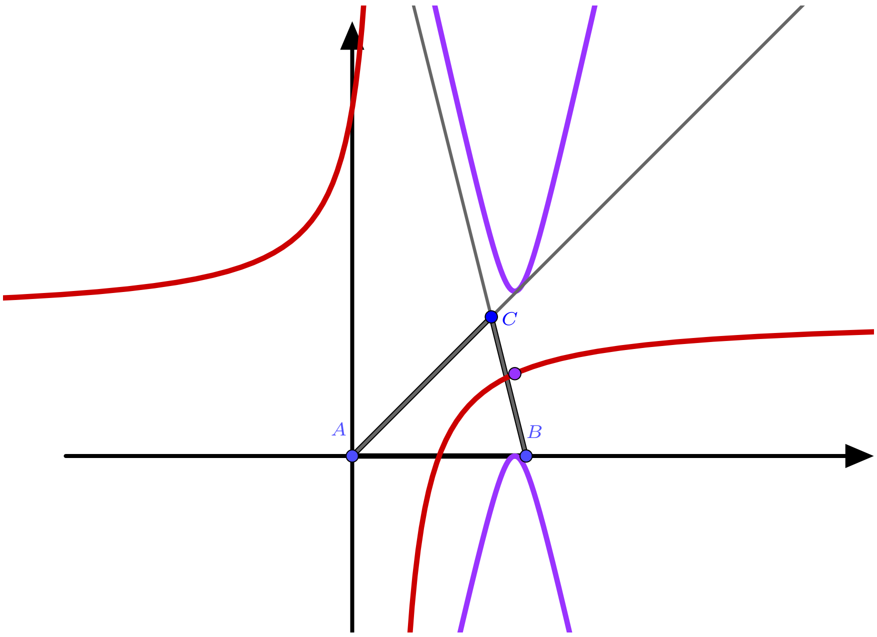
Rysunek 5

Definicja 3.1
Hiperbolę wyróżnioną w przedstawionym powyżej rozumowaniu nazywamy *hiperbolą stowarzyszoną* z trójkątem. Takich hiperbol jest, w ogólności, trzy: w za-

leżności od tego który bok trójkąta wybieramy na początku (tzn. do zdefiniowania elips z jedną osią równoległą do tego boku).

Uwaga 3.2
Środki badanej rodziny elips zawarte są w hiperboli stowarzyszonej z trójkątem. Natomiast nie wszystkie punkty na hiperboli odpowiadają środkom elips. Możliwe są dwie pozostałe sytuacje:

- punkty na hiperboli odpowiadają stożkowej zdegenerowanej: Na przykład środek boku trójkąta odpowiada podwójnej prostej zawierającej ten bok.
- punkt na hiperboli odpowiada środkowi hiperboli, której oś jest równoległa do jednego z boków trójkąta, patrz Rysunek 6.



Rysunek 6

4. Uogólnione wysokości

Definicja 4.1
Rozważmy trójkąt EFG oraz kierunek k prostych prostopadłych do podstawy EF. Niech k_X oznacza prostą z kierunku k przechodzącą przez punkt X. Niech E' oznacza punkt przecięcia prostej k_E z prostą FG (o ile taki punkt istnieje) i analogicznie

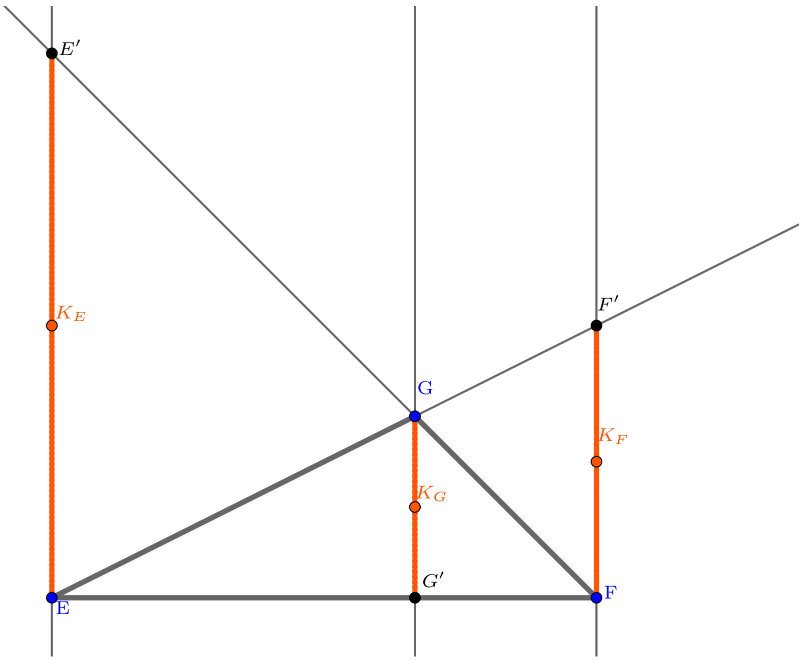
$$F' = k_F \cap prEG, \quad G' = k_G \cap prEF.$$

Odcinki EE', FF', GG' nazywamy *uogólnionymi wysokościami.*

Krzywa drugiego stopnia zadana równaniem (3.4) przechodzi przez środki okręgów dopisanych i środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wynika to wprost z geometrii - okrąg jest szczególnym przykładem elipsy, zaś każda jego średnica jest osią elipsy, więc warunek (W2) jest spełniony automatycznie. Tytułowa hiperbola przechodzi przez środki uogólnionych wysokości. Rzeczywiście te odcinki tworzące uogólnione wysokości można traktować jako graniczny przypadek(degenerację) zbliżających się do nich elips. Jest to dobrze widoczne na animacji [6] dostępnej w sieci. Łatwo pokazać incydencje środków uogólnionych wysokości i wyliczonej wcześniej dla trójkąta ABC hiperboli. Bezpośredni rachunek pokazuje, że te punkty dla boku AB dane są w postaci:

$$K_E = \left(0, \frac{v}{2(1-u)}\right), \quad K_F = \left(1, \frac{v}{2u}\right), \quad K_G = \left(u, \frac{v}{2}\right).$$

Wszystkie trzy punkty spełniają (3.4).



Rysunek 7

Podziękowania

Dziękuje recenzentowi pracy za wnikliwe uwagi, które przyczyniły się do poprawy jej jakości oraz prof. Tomaszowi Szembergowi za udzielone wsparcie merytoryczne.

References

[1] A. B. Ayoub, *The central conic sections revisited*, Math. Mag. 66 (1993), no. 5, 322—325, MR 1572988, Zbl 0806.51017.

[2] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, SINGULAR 4-1-2 - *A computer algebra system for polynomial computations*, http://www.singular.uni-kl.de (2019).

[3] S. Martel, *Eigenvectors, eigenvalues, and finite strain,* Lecture notes University of Hawaii.

[4] K. R. Matthews, *Elementary linear algebra.* Lecture Notes by Keith Matthews, Chapter 7: Identifying Second Degree Equations, pp. 129-148, (2013).

[5] E. Weisstein, *Steiner Inellipse,* From MathWorld–A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/SteinerInellipse.html

[6] M. Zięba, *Pewna hiperbola stowarzyszona z trójkątem,* (Animacja), https://www.geogebra.org/m/jhn949uw

[1] *Instytut Matematyki*
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
30-084 Kraków
ul. Podchorążych 2
E-mail: matematyka.maciej@gmail.com

Przysłano: 20.07.2019; publikacja on-line: 18.01.2020