

Jan Górowski, Adam Łomnicki

## Trójkąty średnioboczne o środkowej mającej długość wymierną\*

**Abstract.** We use the recurrence relations and the Pell equations to determine all integer triangles whose lengths are consecutive integers and the length of a fixed median is a rational number.

Trójkąt o bokach długości  $x - 1$ ,  $x$ ,  $x + 1$ , gdzie  $x \in \mathbb{N}$  i  $x \geq 3$  nazywamy trójkątem średniobocznym. Nazwa pochodzi zapewne stąd, że  $x$  jest średnią arytmetyczną liczb  $x - 1$ ,  $x + 1$ . Będziemy mówili, że trójka liczb  $(x - 1, x, x + 1)$ , gdzie  $x \in \mathbb{N}$  i  $x \geq 3$  wyznacza trójkąt średnioboczny o bokach długości  $x - 1$ ,  $x$ ,  $x + 1$ , i nazywali tę trójkę trójką średnioboczną.

Od dawna badano te trójkąty średnioboczne, których pole wyraża się liczbą wymierną (zob. Sierpiński, 1950; Bednarek, 2009), nazywane są trójkątami wymiernymi średniobocznymi.

W tej pracy wyznaczymy wszystkie te trójkąty średnioboczne, dla których dowolnie ustalona ich środkowa ma długość będącą liczbą wymierną.

Przyjmijmy oznaczenia obowiązujące w całej pracy:

$m_a$  – długość środkowej trójkąta, poprowadzonej do boku długości  $a$ ,

$\mathbb{N}$  – zbiór liczb naturalnych,  $2\mathbb{N}$  – zbiór liczb naturalnych parzystych,

$\mathbb{N}_1$  – zbiór liczb naturalnych dodatnich,

$2\mathbb{N}_1$  – zbiór liczb naturalnych parzystych dodatnich,

$\mathbb{N}_k = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, k - 1\}$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną dodatnią,

$\mathbb{Z}$  – zbiór liczb całkowitych,  $\mathbb{Q}$  – zbiór liczb wymiernych,

$NWD(p, q)$  – największy wspólny dzielnik liczb naturalnych dodatnich  $p, q$ .

### PROBLEM 1

Znaleźć wszystkie trójkąty średnioboczne wyznaczone przez trójki  $(x - 1, x, x + 1)$ , dla których  $m_x \in \mathbb{Q}$ .

---

\*On some integer triangles with a rational median

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 51M05, 51M04, 11B37

Key words and phrases: recurrence relation, Pell equation, integer triangle

Rozwiązanie problemu 1

Ze wzoru na długość środkowej trójkąta dostajemy

$$m_x = \frac{1}{2} \sqrt{2((x-1)^2 + (x+1)^2) - x^2} \quad \text{czyli} \quad 2m_x = \sqrt{3x^2 + 4}.$$

Ponieważ  $3x^2 + 4$  jest liczbą naturalną, zatem  $m_x \in \mathbb{Q}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sqrt{3x^2 + 4}$  jest liczbą naturalną, czyli  $2m_x \in \mathbb{N}$ .

Przyjmijmy teraz oznaczenie  $y = 2m_x$ . Stąd rozwiązanie problemu 1 jest równoważne znalezieniu wszystkich rozwiązań równania Pella (zob. Song, 2006, s. 52)

$$y^2 = 3x^2 + 4 \quad \text{o niewiadomych } x, y \in \mathbb{N}_1 \quad (1)$$

spełniających warunek  $x \geq 3$ .

Przyjmijmy oznaczenia:

$$F: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, \quad F(x, y) = (2x + y, 3x + 2y),$$

$$G: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, \quad G(x, y) = (2x - y, -3x + 2y).$$

Zauważmy, że  $F \circ G = G \circ F = Id_{\mathbb{Z}^2}$ , gdzie  $Id_{\mathbb{Z}^2}$  oznacza przekształcenie tożsamościowe zbioru  $\mathbb{Z}^2$ .

Udowodnimy teraz trzy lematy, które wykorzystamy w dalszej części rozwiązania problemu 1.

LEMAT 1

*Jeśli  $(x, y)$  jest rozwiązaniem równania*

$$y^2 = 3x^2 + 4 \quad \text{o niewiadomych } x, y \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

*to  $F(x, y)$  oraz  $G(x, y)$  są także rozwiązaniami równania (2).*

*Dowód.* Niech  $(x, y)$  będzie rozwiązaniem równania (2). Wtedy  $F(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  oraz  $G(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ . Ponadto

$$(3x + 2y)^2 - 3(2x + y)^2 = -3x^2 + y^2.$$

Stąd  $F(x, y)$  jest rozwiązaniem równania (2).

Analogicznie można uzasadnić, że jeśli  $(x, y)$  jest rozwiązaniem równania (2), to  $G(x, y)$  jest także rozwiązaniem równania (2).

Dowód lematu 1 został zakończony.

LEMAT 2

*Jeśli  $(x, y)$  jest rozwiązaniem równania (1) oraz  $x \geq 8$ , to  $G(x, y) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_4$ .*

*Dowód.* Niech  $(x, y)$  będzie rozwiązaniem równania (1), takim, że  $x \geq 8$ . Wtedy następujące warunki są równoważne:

$$2x - y \geq 2,$$

$$2x - 2 \geq y,$$

$$\begin{aligned}
4x^2 - 8x + 4 &\geq y^2, \\
4x^2 - 8x + 4 &\geq 3x^2 + 4, \\
x^2 - 8x &\geq 0, \\
(x - 4)^2 &\geq 16, \\
x - 4 &\geq 4, \\
x &\geq 8.
\end{aligned}$$

Podobnie, przy uczynionych założeniach, następujące warunki są równoważne:

$$\begin{aligned}
-3x + 2y &\geq 4, \\
2y &\geq 4 + 3x, \\
4y^2 &\geq 16 + 24x + 9x^2, \\
4(3x^2 + 4) &\geq 16 + 24x + 9x^2, \\
3x^2 - 24x &\geq 0, \\
(x - 4)^2 &\geq 16, \\
x &\geq 8.
\end{aligned}$$

To kończy dowód lematu 2.

### LEMAT 3

*Jeśli  $(x, y)$  jest rozwiązaniem równania (1), to istnieje liczba naturalna  $n$ , taka że  $(x, y) = F^n(2, 4)$ , gdzie  $F(x, y) = (2x + y, 3x + 2y)$ , a  $F^n$  oznacza  $n$ -tą iterację funkcji  $F$ .*

*Dowód.* Z lematu 1 wynika, że  $F^n(2, 4)$  jest rozwiązaniem równania (1) dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że nie istnieje rozwiązanie  $(x, y)$  równania (1), takie, że  $x \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ .

Stąd i z lematów 1 i 2 wnosimy, że jeśli  $(x, y)$  jest rozwiązaniem równania (1), takim, że  $x \geq 8$ , to  $G(x, y)$ , gdzie  $G(x, y) = (2x - y, -3x + 2y)$  jest rozwiązaniem równania (1). Jeśli teraz  $(x', y') = G(x, y)$  oraz  $x' \geq 8$ , to  $G(x', y') = (x'', y'')$  daje nowe rozwiązanie równania (1).

Kontynuując ten proces dojdziemy do rozwiązania, którego pierwsza współrzędna jest mniejsza od 8, czyli do rozwiązania  $(2, 4)$ . To oznacza, że  $G^n(x, y) = (2, 4)$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ . Stąd  $(x, y) = F^n(2, 4)$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ . Dowód lematu 3 został zakończony.

Udowodnimy teraz

### TWIERDZENIE 1

*Jeśli*

$$x_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}},$$

$$y_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}_1,$$

*to  $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}_1\}$  jest zbiorem rozwiązań równania (1).*

*Dowód.* Z lematu 3 wynika, że wszystkie rozwiązania równania (1) można otrzymać ze wzorów

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = 3x_n + 2y_n, \end{cases} \quad (3)$$

gdzie  $n \in \mathbb{N}_1$  i  $(x_1, y_1) = (2, 4)$ .

Z warunków (3) otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 2x_{n+1} + y_{n+1}, \\ x_{n+2} &= 2x_{n+1} + 3x_n + 2y_n, \\ x_{n+2} &= 2x_{n+1} + 3x_n + (2x_{n+1} - 4x_n), \\ x_{n+2} &= 4x_{n+1} - x_n. \end{aligned}$$

Ponadto  $(x_2, y_2) = (8, 14)$ .

Wobec tego ciąg  $(x_n)$  spełnia równanie rekurencyjne:

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}_1 \quad (4)$$

i warunki początkowe  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 8$ .

Z teorii równań rekurencyjnych wiadomo, że rozwiązaniem równania rekurencyjnego (4) z warunkami  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 8$  jest ciąg określony wzorem

$$x_n = A(2 + \sqrt{3})^n + B(2 - \sqrt{3})^n,$$

gdzie stałe  $A$ ,  $B$  spełniają układ równań

$$\begin{cases} A(2 + \sqrt{3}) + B(2 - \sqrt{3}) = 2, \\ A(2 + \sqrt{3})^2 + B(2 - \sqrt{3})^2 = 8. \end{cases}$$

Stąd  $A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ . To dowodzi, że ciąg zadany wzorem

$$x_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}$$

jest rozwiązaniem równania rekurencyjnego (4), spełniającym warunki początkowe  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 8$ . Podobnie wychodząc od układu (3), gdzie  $(x_1, y_1) = (2, 4)$  dostajemy

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 0, \quad (5)$$

gdzie  $n \in \mathbb{N}_1$  oraz  $y_1 = 4$ ,  $y_2 = 14$ .

Rozwiązując równanie rekurencyjne (5) z podanymi warunkami początkowymi, dostajemy  $y_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ , a to kończy dowód twierdzenia 1.

Z twierdzenia 1 wynika bezpośrednio rozwiązanie problemu 1.

Jeśli

$$x_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}},$$

$$y_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n, n \in \mathbb{N}_1,$$

to trójki  $(x_{n+1} - 1, x_{n+1}, x_{n+1} + 1)$  są wszystkimi trójkami średniobocznymi, o których mowa w problemie 1.

Ponadto  $m_{x_{n+1}} = \frac{1}{2}y_{n+1}$ , czyli  $m_{x_{n+1}} = \frac{1}{2}((2 + \sqrt{3})^{n+1} + (2 - \sqrt{3})^{n+1})$ .

#### PROBLEM 2

Znaleźć wszystkie trójki średnioboczne  $(x - 1, x, x + 1)$ , dla których  $m_{x-1} \in \mathbb{Q}$ .

#### PROBLEM 3

Znaleźć wszystkie trójki średnioboczne  $(x - 1, x, x + 1)$ , dla których  $m_{x+1} \in \mathbb{Q}$ .

Dla rozwiązania problemów 2 i 3 posłużymy się rozwiązaniami równania

$$y^2 = 3x^2 - 2 \text{ o niewiadomych } x, y \in \mathbb{N}_1 \quad (6)$$

Udowodnimy teraz

#### TWIERDZENIE 2

Jeśli

$$x_n = \frac{(\sqrt{3} - 1)(2 + \sqrt{3})^n + (\sqrt{3} + 1)(2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},$$

$$y_n = \frac{(3 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n - (3 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},$$

gdzie  $n \in \mathbb{N}_1$ , to zbiór  $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}_1\}$  jest zbiorem rozwiązań równania (6).

*Dowód.* Niech  $F(x, y) = (2x + y, 3x + 2y)$ ,  $G(x, y) = (2x - y, -3x + 2y)$ , gdzie  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ .

Zauważamy, że  $F \circ G = Id_{\mathbb{Z}^2}$ . Podobnie jak przy rozwiązaniu problemu 1 można pokazać, że jeśli  $(x, y)$  jest rozwiązaniem równania

$$y^2 = 3x^2 - 2 \text{ o niewiadomych } x, y \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

to  $(2x + y, 3x + 2y)$  oraz  $(2x - y, -3x + 2y)$  są również rozwiązaniami równania (7). Zauważmy ponadto, że jeśli  $(x, y)$  jest rozwiązaniem równania (6), to

$$(2x + y, 3x + 2y) \in \mathbb{N}_1^2 \text{ i } 2x + y > x \text{ i } 3x + 2y > y \text{ i } (2x + y, 3x + 2y)$$

jest rozwiązaniem równania (6).

Pokażemy teraz, że jeśli  $(x, y)$  jest rozwiązaniem równania (6) i  $x \geq 2$ , to  $(2x - y, -3x + 2y)$  jest rozwiązaniem równania (6).

Wiemy już, że  $(2x - y, -3x + 2y)$  jest rozwiązaniem równania (7). Wystarczy zatem uzasadnić, że  $2x - y > 0$  i  $-3x + 2y > 0$ .

Warunek  $2x - y > 0$  jest równoważny kolejno warunkom:

$$2x > y, \quad 4x^2 > y^2, \quad 4x^2 > 3x^2 - 2, \quad x^2 > -2.$$

Warunek  $-3x + 2y > 0$  jest równoważny kolejno warunkom:

$$2y > 3x, \quad 4y^2 > 9x^2, \quad 4(3x^2 - 2) > 9x^2, \quad 3x^2 > 8, \quad x \geq 2.$$

Zauważmy teraz, że jedynymi rozwiązaniami równania (6) należącymi do zbioru  $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$  są  $(1, 1)$  oraz  $(3, 5)$ . Wobec tego dla każdego rozwiązania  $(x, y)$  równania (6), takiego że  $x \geq 2$  istnieje  $n \in \mathbb{N}_1$ , takie, że  $G^n(x, y) = (1, 1)$ , gdzie  $G^n$  oznacza  $n$ -tą iterację funkcji  $G$ . Stąd też mamy  $(x, y) = F^n(G^n(x, y)) = F^n(1, 1)$ .

Przyjmijmy teraz następujące oznaczenie:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n, \\ y_{n+1} = 3x_n + 2y_n, \end{cases} \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}_1 \text{ i } (x_1, y_1) = (1, 1). \quad (8)$$

Wobec wcześniejszych ustaleń dla zakończenia dowodu twierdzenia 2 wystarczy znaleźć przepisy ciągów określonych układem (8). Podobnie jak przy rozwiązaniu problemu 1 z układu (8) wynika, że ciągi  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  spełniają odpowiednio warunki:

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0 \text{ i } x_1 = 1 \text{ i } x_2 = 3, \quad (9)$$

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 0 \text{ i } y_1 = 1 \text{ i } y_2 = 5. \quad (10)$$

Bez trudu można sprawdzić, że ciągi podane w twierdzeniu 2 spełniają warunki: ciąg  $(x_n)$  warunek (9), zaś ciąg  $(y_n)$  warunek (10). To kończy dowód twierdzenia 2.

Przystępujemy teraz do rozwiązania problemu 2.

Niech  $m_{x-1} = \frac{p}{q}$ , gdzie  $p, q \in \mathbb{N}_1$  i  $NWD(p, q) = 1$ . Ze wzoru na długość środkowej trójkąta dostajemy kolejno:

$$m_{x-1} = \frac{1}{2} \sqrt{2(x^2 + (x+1)^2) - (x-1)^2},$$

$$4p^2 = q^2(3x^2 + 6x + 1).$$

Skoro  $NWD(p, q) = 1$ , to  $q \mid 2$ , stąd  $q = 1$  lub  $q = 2$ .

Gdyby  $q = 1$ , to mielibyśmy  $4p^2 = 3x^2 + 6x + 1$ . Otrzymane równanie nie ma rozwiązań w  $\mathbb{N}_1^2$ , ponieważ dla  $x \in 2\mathbb{N}_1$  mamy

$$4 \mid 4p^2 \text{ i } 4 \nmid (3x^2 + 6x + 1)$$

oraz dla  $x \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$  mamy

$$4 \mid 4p^2 \text{ i } 4 \nmid (3x^2 + 6x + 1).$$

To oznacza, że należy przyjąć  $q = 2$ . Stąd rozwiązanie problemu 2 jest równoważne rozwiązaniu w  $\mathbb{N}_1^2$  równania

$$p^2 = 3x^2 + 6x + 1, \text{ gdzie } x \geq 3 \quad (11)$$

lub też równania

$$p^2 = 3(x+1)^2 - 2, \text{ gdzie } x \geq 3. \quad (12)$$

Z twierdzenia 2 wnioskujemy, że trójki  $(x_{n+2} - 2, x_{n+2} - 1, x_{n+2})$ , gdzie

$$x_n = \frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}, \quad n \in \mathbb{N}_1$$

są wszystkimi trójkami średniobocznymi, dla których  $m_{x_{n+2}-2} \in \mathbb{Q}$ . Ponadto  $m_{x_{n+2}-2} = \frac{1}{2}y_{n+2}$ , gdzie

$$y_n = \frac{(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n - (3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Analogicznie jak problem 2 można rozwiązać problem 3. Oto jego rozwiązanie:

Trójki  $(x_{n+1}, x_{n+1} + 1, x_{n+1} + 2)$ ,  $n \in \mathbb{N}_1$ , gdzie:

$$x_n = \frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}, \quad n \in \mathbb{N}_1$$

są wszystkimi trójkami średniobocznymi, dla których  $m_{x_{n+1}+2} \in \mathbb{Q}$ . Ponadto  $m_{x_{n+1}+2} = \frac{1}{2}y_{n+1}$ , gdzie

$$y_n = \frac{(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n - (3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Mamy nadzieję, że przedstawione problemy i ich rozwiązania wzbudzą zainteresowanie nauczycieli akademickich, którzy szukają niebanalnych zagadnień do zajęć z teorii liczb, a w konsekwencji i studentów matematyki, zwłaszcza tych, którzy znajdują satysfakcję w stawianiu problemów i poszukiwaniu rozwiązań w oparciu o poznane na studiach nowe działy matematyki wyższej. Zazwyczaj w ramach kursu algebry z teorią liczb studenci poznają wiele pojęć i twierdzeń, ilustrowanych bardzo elementarnymi przykładami, a prawie nie rozwiązują znalezionych w literaturze lub postawionych samodzielnie zadań-problemów. To wynika z różnych powodów, głównie z konieczności realizacji obszernych programów nauczania. Oczywiście pisanie prac dyplomowych z matematyki lub dydaktyki matematyki wdraża studentów w twórcze poznawanie matematyki. Ta praca miała też takie ambitne cele.

## Literatura

- Bednarek, W.: 2009, Trójkąty średnioboczne, *Matematyka* **7**, 433-434.  
 Sierpiński, W.: 1950, *Teoria liczb, Monografie Matematyczne*, t. XIX, Warszawa-Wrocław.  
 Song, Y. Y.: 2006, *Teoria liczb w informatyce*, PWN, Warszawa.

*Instytut Matematyki  
 Uniwersytet Pedagogiczny  
 ul. Podchorążych 2  
 PL-30-084 Kraków  
 e-mail: alomnicki@poczta.fm  
 e-mail: jangorowski@interia.pl*

