Prace Koła Mat. Uniw. Ped. w Krak. 1 (2014), 27-40

Prace Koła Matematyków
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie (2014)

Sławomir Przybyło[1]

Liczby surrealne

Streszczenie. Celem artykułu jest przedstawienie podstawowych informacji na temat liczb surrealnych. Punktem wyjścia do ich konstrukcji są liczby porządkowe, o których traktuje pierwszy rozdział niniejszej pracy. Następnie przedstawiona została definicja liczby surrealnej według pomysłu Gonshora, wraz z podaniem sposobu określenia porządku i działań na klasie tych liczb. W ostatniej części wskazano niektóre podklasy liczb surrealnych, a także podano dwa ważne twierdzenia mówiące o związku tych liczb z liczbami rzeczywistymi i liczbami porządkowymi.

Abstract. The main aim of this article is to present basic information about surreal numbers. The starting point for their construction are ordinal numbers, which are described in the first part of the work. Then I present the definition, basic properties and operations on surreal numbers according to Harry Gonshor. In the last part there have been indicated some subclasses of surreal numbers. Finally I gave two important theorems about the connection between real numbers, ordinal numbers and surreal numbers.

1. Wstęp

Liczby surrealne (zwane również jako liczby nadrzeczywiste czy liczby Conwaya) są obiektami matematycznymi, których definicję i konstrukcję przedstawił John Horton Conway w książce *On Number and Games* z 1976 roku [3]. Jego pomysł łączy z jednej strony ideę przekrojów Dedekinda, z drugiej zaś – ideę konstrukcji liczb naturalnych według von Neumanna. W rezultacie powstaje klasa obiektów, która spełnia aksjomaty ciała uporządkowanego. Jest ona zarazem największą taką strukturą, w tym sensie, że każde inne ciało uporządkowane (między innymi uporządkowane ciało liczb rzeczywistych) może zostać w niej zanurzone. Ale liczby surrealne to coś więcej - zawierają w sobie również inne obiekty, takie jak liczby porządkowe czy liczby infinitezymalne (takie liczby dodatnie, które są mniejsze od dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej). Konstrukcja Conwaya jest

AMS (2010) Subject Classification: 03E10; 12L15.
Słowa kluczowe: liczby surrealne, liczby porządkowe, ciało uporządkowane.

jednak prowadzona środkami wykraczającymi poza klasyczną matematykę. Dlatego też jego pomysł został rozwinięty przez Harrego Gonshora w książce *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers* [7]. Autor ten, w przeciwieństwie do Conwaya, zbudował swoją teorię w ramach matematyki klasycznej.

Niniejszy tekst będzie opierał się właśnie na konstrukcji Gonshora. Zakłada ona znajomość podstawowych własności liczb porządkowych, dlatego na początku przedstawię informacje wstępne, dotyczące tych obiektów. Następnie opiszę konstrukcję ciała liczb surrealnych. Na końcu podam niektóre ciekawe informacje dotyczące tychże liczb. Z uwagi na objętość tekstu, przestawię w nim jedynie podstawowe informacje związane z liczbami surrealnymi. Więcej informacji zawierają prace magisterskie poświęcone temu zagadnieniu, stanowiące punkt wyjścia i podstawę niniejszego artykułu: [10, 11]. Warto również wspomnieć jedno z pierwszych popularnych wprowadzeń w teorię liczb surrealnych: [8] czy też jedyną dotychczas publikację książkową w języku polskim, która zawiera informacje na temat tych liczb: [4].

2. Definicja i podstawowe własności liczb porządkowych

Przypomnienie podstawowych informacji dotyczących liczb porządkowych zaczniemy od podania definicji zbioru tranzytywnego.

Definicja 1 ([1], s. 107)
Zbiór x nazywamy *tranzytywnym*, gdy

$$\forall_{y\in x}\ y \subseteq x.$$

Przykład 1
a) Zbiór pusty jest zbiorem tranzytywnym.
b) Zbiór $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ jest zbiorem tranzytywnym.
c) Zbiór $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

Definicja 2 ([1], s. 108)
Zbiór tranzytywny α nazywamy *liczbą porządkową*, gdy

$$\forall_{x,y\in\alpha}\ y \in x \vee y = x \vee x \in y.$$

Warunek z powyższej definicji nazywamy *prawem trychotomii.*
Spełniają go między innymi $\emptyset$ i zbiór A z przykładu 1, zbiory te są zatem liczbami porządkowymi. Natomiast zbiór B ze wspomnianego przykładu nie spełnia prawa trychotomii.

Liczby porządkowe można zdefiniować również w inny sposób:

Definicja 3 ([9], s. 193)
Liczbą porządkową nazywamy typ porządkowy zbioru dobrze uporządkowanego.

Przykład 2
Liczbami porządkowymi są m. in. 0, 3, ω, $\omega + 1$, $\omega + \omega$.

Liczba ω oznacza typ porządkowy zbioru liczb naturalnych.

Obie definicje liczb porządkowych są równoważne, dzięki nim otrzymujemy obiekty, które możemy ze sobą jednoznacznie utożsamiać. Na przykład liczbę 0 (rozumianą jako typ porządkowy zbioru nieposiadającego żadnego elementu) utożsamiamy z liczbą porządkową $\emptyset$ (w znaczeniu zbioru tranzytywnego i spełniającego prawo trychotomii), natomiast liczbę 3 ze zbiorem $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Warto również podkreślić, że jest to zgodne z aksjomatyczną konstrukcją liczb naturalnych von Neumanna.

Uwaga 1
Liczby porządkowe tworzą klasę właściwą, tzn. nie są zbiorem.

Na liczbach porządkowych można określić porządek i działania, takie jak dodawanie, mnożenie, różnica (ta ostatnia tylko w niektórych przypadkach) czy potęgowanie. Niżej przedstawię tylko podstawowe wiadomości na ich temat. Więcej informacji można odnaleźć między innymi w: [1, 9, 12]

Definicja 4 ([1], s. 111)
Niech α i β będą liczbami porządkowymi. *Porządek* między nimi określamy następująco:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow_{df} \alpha \in \beta,$$

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow_{df} \alpha < \beta \vee \alpha = \beta.$$

Definicja 5 ([1], s. 126)
Sumą liczb porządkowych α i β nazywamy typ porządkowy zbioru

$$(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta),$$

uporządkowanego leksykograficznie, tj.

$$\alpha + \beta = \mathrm{tp}((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta), \prec),$$

gdzie $\prec$ jest obcięciem porządku leksykograficznego na zbiorze $\{0, 1\} \times \max\{\alpha, \beta\}$ do zbioru $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$.

Definicja 6 ([1], s. 127)
Iloczynem liczb porządkowych α i β nazywamy typ porządkowy zbioru $\beta \times \alpha$ uporządkowanego leksykograficznie, tj.

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{tp}(\beta \times \alpha, \prec).$$

Definicja 7 ([1], s. 130)
Niech α i β będą liczbami porządkowymi. *Potęgę* α^β definiujemy rekurencyjnie:
(a) $\alpha^0 = 1$,
(b) $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$,
(c) $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma$, jeśli β jest liczbą graniczną oraz $\beta > 0$.

Należy podkreślić, że wspomniane działania nie zawsze mają takie własności, jak na przykład działania na liczbach naturalnych czy w ciałach uporządkowanych (o ciałach uporządkowanych można przeczytać w [1]). Dodawanie i mnożenie nie są działaniami przemiennymi, ponadto porządek na liczbach porządkowych nie jest zgodny z tymi działaniami. Nie zachodzi również prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania. Prawdziwe są bowiem następujące uwagi:

Uwaga 2

$$1 + \omega \neq \omega + 1$$

Jest tak oczywiście dlatego, że typ porządkowy zbioru liczb naturalnych z dodanym innym elementem, będącym mniejszym od każdej liczby naturalnej, jest równy typowi porządkowymi zbioru liczb naturalnych. Z kolei typ porządkowy zbioru liczb naturalnych z dodanym inny elementem, będącym większym od każdej liczby naturalnej, jest różny od typu porządkowego zbioru liczb naturalnych (typ porządkowy zachowuje bowiem istnienie elementu największego).

Podobnie nietrudno wykazać prawdziwość kolejnych uwag:

Uwaga 3

$$2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2.$$

Uwaga 4
Dodawanie i mnożenie liczb porządkowych nie jest zgodne z porządkiem.

Pokazują to poniższe przykłady:

Przykład 3
$1 + \omega = 2 + \omega$.

Gdyby natomiast dodawanie było zgodne z porządkiem, to z faktu, iż $1 < 2$, dostalibyśmy, że $1 + \omega < 2 + \omega$, co jest sprzeczne z powyższą równością.

Przykład 4
$1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega$.

Podobnie jak wyżej, przykład ten dowodzi, że mnożenie liczb porządkowych nie jest zgodne z porządkiem.
Natomiast uzasadnieniem faktu, iż nie zachodzi prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania, może być przykład następujący:

Przykład 5
$(1 + 1) \cdot \omega \neq 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega$

W roku 1906 Gerhard Hessenberg podał inne definicje działań na liczbach porządkowych. Działania te własność przemienności posiadają. Nazywamy je sumą naturalną i iloczynem (produktem) naturalnym liczb porządkowych. Aby je przedstawić, potrzebne będzie nam jednak poniższe twierdzenie, przedstawione w roku 1897 przez George Cantora.

TWIERDZENIE 1 ([1], s. 133. **Twierdzenie Cantora o postaci normalnej**)
Jeśli α i β są liczbami porządkowymi, przy czym $\alpha > 1$ oraz $\beta > 0$, to liczbę β można w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci:

$$\beta = \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \alpha^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1},$$

przy czym $\gamma_{k-1} < \cdots < \gamma_0$ oraz $0 < \delta_i < \alpha$ dla każdego $i < k < \omega$.

Postać tę nazywamy *rozwinięciem* liczby β przy podstawie α.

UWAGA 5
Liczba porządkowa $\beta = \omega^2 + \omega \cdot 7 + 13$ w rozwinięciu przy podstawie 2 ma postać:

$$\beta = 2^{\omega \cdot 2} + 2^{\omega+2} + 2^{\omega+1} + 2^{\omega} + 2^3 + 2^2 + 2^0.$$

Dowód. Korzystając z własności działań na liczbach porządkowych, mówiących między innymi, że $2^\omega = \omega$, dostajemy: $\omega^2 = (2^\omega)^2 = 2^{\omega \cdot 2}$;

$$\omega \cdot 7 = 2^\omega \cdot 7 = 2^\omega \cdot (4 + 2 + 1) = 2^\omega \cdot 4 + 2^\omega \cdot 2 + 2^\omega = 2^{\omega+2} + 2^{\omega+1} + 2^\omega.$$

Oczywiście również $13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$. Sumując, otrzymujemy ostatecznie prawdziwość równości w uwadze.

Korzystając z twierdzenia Cantora o postaci normalnej liczby porządkowej, natychmiast otrzymujemy prawdziwość poniższego wniosku:

WNIOSEK 1
Jeśli β jest liczbą porządkową i $\beta > 0$, to można ją w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci:

$$\beta = \omega^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \omega^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1},$$

przy czym $\gamma_{k-1} < \cdots < \gamma_0$ oraz $0 < \delta_i < \alpha$ dla każdego $i < k < \omega$.

Mając zatem dane dwie liczby porządkowe α i β, można je przedstawić w postaci rozwinięć o podstawie ω, o których mowa w powyższym wniosku. Uzupełniając te rozwinięcia potęgami ω ze współczynnikami 0, dostajemy jednoznaczne przedstawienia liczb α i β w następującej postaci:

$$\alpha = \omega^{\eta_1} \cdot p_1 + \cdots + \omega^{\eta_h} \cdot p_h,$$

$$\beta = \omega^{\eta_1} \cdot q_1 + \cdots + \omega^{\eta_h} \cdot q_h,$$

gdzie $\eta_1 > \cdots > \eta_h, h, p_i, q_i \in \mathbb{N}, i \in \{i, \ldots, h\}$.

Możemy teraz przejść do definicji sumy naturalnej i naturalnego iloczynu liczb porządkowych.

DEFINICJA 8 ([9], s. 215)
Niech α, β będą liczbami porządkowymi i niech

$$\alpha = \omega^{\eta_1} \cdot p_1 + \cdots + \omega^{\eta_h} \cdot p_h, \beta = \omega^{\eta_1} \cdot q_1 + \cdots + \omega^{\eta_h} \cdot q_h,$$

gdzie $\eta_1 > \cdots > \eta_h$ oraz $h, p_i, q_i \in \mathbb{N}, i \in \{i, \ldots, h\}$.
Sumą naturalną liczb porządkowych α i β nazywamy liczbę

$$\alpha \oplus \beta =_{df} \omega^{\eta_1} \cdot (p_1 + q_1) + \cdots + \omega^{\eta_h} \cdot (p_h + q_h).$$

Iloczynem naturalnym liczb porządkowych α i β nazywamy liczbę

$$\alpha \odot \beta =_{df} \sum_{1 \leq i,j \leq h} \omega^{\eta_i \oplus \eta_j} \cdot p_i q_j,$$

przy czym suma ta jest uporządkowana malejąco względem wykładników potęgi ω.

Przykład 6
$(\omega + 1) \odot (\omega^2 + 2) = \omega^{1\oplus 2} \cdot 1 \cdot 1 + \omega^{0\oplus 2} \cdot 1 \cdot 1 + \omega^{1\oplus 0} \cdot 1 \cdot 2 + \omega^{0\oplus 0} \cdot 1 \cdot 2 = \omega^3 \cdot 1 + \omega^2 \cdot 1 + \omega^1 \cdot 2 + \omega^0 \cdot 2 = \omega^3 + \omega^2 + \omega \cdot 2 + 2$.

Uwaga 6
Suma naturalna i iloczyn naturalny liczb porządkowych są działaniami przemiennymi.

Dowód. Niech α, β będą liczbami porządkowymi i niech

$$\alpha = \omega^{\eta_1} \cdot p_1 + \cdots + \omega^{\eta_h} \cdot p_h, \beta = \omega^{\eta_1} \cdot q_1 + \cdots + \omega^{\eta_h} \cdot q_h,$$

gdzie $\eta_1 > \cdots > \eta_h$, oraz $h, p_i, q_i \in \mathbb{N}, i \in \{i, \ldots, h\}$.

Wówczas:

$$\alpha \oplus \beta = \omega^{\eta_1} \cdot (p_1 + q_1) + \cdots + \omega^{\eta_h} \cdot (p_h + q_h). = \omega^{\eta_1} \cdot (q_1 + p_1) + \cdots + \omega^{\eta_h} \cdot (q_h + p_h) = \beta \oplus \alpha.$$

Korzystając z udowodnionej wyżej przemienności sumy naturalnej, dostajemy również:

$$\alpha \odot \beta = \sum_{1 \leq i,j \leq h} \omega^{\eta_i \oplus \eta_j} \cdot p_i q_j = \sum_{1 \leq i,j \leq h} \omega^{\eta_j \oplus \eta_i} \cdot q_j p_i = \beta \odot \alpha.$$

□

3. Konstrukcja liczb surrealnych

Przedstawiona zostanie teraz konstrukcja liczb surrealnych według książki Harry'ego Gonshora [7]. W jego koncepcji liczbami surrealnymi są funkcje, których dziedzinami są dowolne liczby porządkowe a przeciwdziedziną jest zbiór dwuelementowy $\{+, -\}$. Liczby surrealne są zatem ciągami znaków $+$ i $-$ o dowolnej długości.

Definicja 9 ([7], s. 3)
Liczba surrealna a to funkcja, której dziedziną jest pewna liczba porządkowa α, przeciwdziedziną zaś zbiór $\{+, -\}$, tj.

$$a \colon \alpha \to \{+, -\}.$$

Warto tutaj dodać, że w miejsce znaków $+, -$ można przyjąć inne obiekty, na przykład $+1, -1$, przyjmując tylko, jak zaraz zobaczymy, że pierwszy z nich jest większy, zaś drugi mniejszy od 0.

Przykład 7
Niech $\alpha = 4$, tj. $\alpha = \{0, 1, 2, 3\}$. Niech

$$a\colon \{0, 1, 2, 3\} \to \{+, -\}$$

będzie taką funkcją, że: $a(0) = +$, $a(1) = -$, $a(2) = +$, $a(3) = +$.
Funkcję a zapisujemy w skrócie jako ciąg $(+-++)$.

Fakt, że liczba a jest liczbą surrealną, będziemy zapisywać jako $a \in S$. Jak już wyżej pisałem, klasa liczb porządkowych jest klasą właściwą. Ponadto dla każdej liczby porządkowej α, funkcja stała $a\colon \alpha \to \{+\}$ jest liczbą surrealną. Wynika stąd, że uniwersum wszystkich liczb surrealnych tworzy klasę właściwą, tzn. nie jest zbiorem.

Dla dalszych rozważań wygodnie będzie przyjąć definicje długości liczby surrealnej i jej przedziału początkowego.

Definicja 10 ([7], s. 3)
Długością liczby surrealnej a nazywamy dziedzinę funkcji a. Długość liczby surrealnej a będziemy oznaczać symbolem $l(a)$.

Taka definicja jest bardzo naturalna, co pokazuje przykład 7: dziedziną funkcji a jest liczba 4, taka sama jest również długość ciągu $(+-++)$.

Definicja 11 ([7], s. 3)
Przedziałem początkowym liczby surrealnej a, której dziedziną jest liczba porządkowa α, nazywamy zacieśnienie $a_{|\gamma}$, gdzie $\gamma \leq \alpha$.

Przykład 8
Niech $a = (++--)$. Przedziałami początkowymi liczby a są liczby: $a_{|0} = ()$, $a_{|1} = (+)$, $a_{|2} = (++)$, $a_{|3} = (++-)$ oraz a.

Liczba $()$, która pojawiła się w powyższym przykładzie, jest funkcją pustą. Jest ona również nazywana *sekwencją pustą* i oznaczana czasem przez $\emptyset$.

Przechodzimy teraz do określenia relacji porządku na liczbach surrealnych. Pierwsza trudność na jaką tu trafiamy to ta, że liczby surrealne mogą mieć różne dziedziny. Jeżeli liczby surrealne a i b są tej samej długości (a więc ich dziedziny, odpowiednio α i β, są równe), to porównujemy je, biorąc pod uwagę porządek leksykograficzny, przyjmując, że $- < +$. Jeżeli liczby a i b są różnej długości, to, ponieważ ich dziedzinami są liczby porządkowe, które możemy porównywać, przyjmujemy konwencję, że: jeśli $\alpha < \beta$, to liczbę a przedłużamy w ten sposób, że $a(\zeta) = 0$ dla $\alpha \leq \zeta < \beta$, przyjmując jednocześnie, iż $- < 0 < +$.

Definicja 12 ([7], s. 3)
Niech a, b będą liczbami surrealnymi określonymi na tej samej dziedzinie. *Porządek* między liczbami a i b definiujemy następująco:

$$a < b \Leftrightarrow_{df} a(\gamma) < b(\gamma), \quad \text{gdzie } \gamma = \min\{\zeta : a(\zeta) \neq b(\zeta)\},$$

przyjmując również: $- < 0 < +$.

Tak zdefiniowany porządek jest liniowy.

Przykład 9
Niech $a = (+-)$, $b = (+)$, $c = (++--)$, $d = (-++)$, $e = (-+-)$. Wtedy, na podstawie definicji porządku, otrzymujemy:

$$(-+-) < (-++) < (+-) < (+) < (++--).$$

W dalszym ciągu przedstawione zostaną definicje działań na liczbach surrealnych: dodawania i mnożenia. Mają one charakter indukcyjny: aby poznać wynik działań na danych liczbach surrealnych, należy znać wynik działań na liczbach surrealnych o krótszej długości. W celu zdefiniowania takich działań potrzebny będzie sposób utożsamiania każdej liczby surrealnej ze zbiorami liczb o krótszej długości, a także odwrotnie: sposób przedstawiania zbiorów liczb surrealnych, spełniających pewne warunki, w postaci jednej liczby surrealnej. Mówią o tym poniższe twierdzenia:

Twierdzenie 2 ([7], s. 4)
Niech L i R będą zbiorami liczb surrealnych spełniającymi warunek:

$$\forall_{a,b \in S}\ a \in L \wedge b \in R \Rightarrow a < b.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedna liczba surrealna c, o najmniejszej długości, spełniająca warunek:

$$\forall_{a,b \in S}\ a \in L \wedge b \in R \Rightarrow a < c < b. \tag{1}$$

Ponadto, dla dowolnej liczby surrealnej s, spełniającej warunek:

$$\forall_{a \in L} \forall_{b \in R}\ a \leq s \leq b, \tag{2}$$

liczba c jest jej przedziałem początkowym.

Liczbę c z powyższego twierdzenia oznaczamy jako $L|R$.

Przykład 10
Niech $L = \{(-+++), (+-)\}$, $R = \{(++), (++-)\}$. Wówczas $L|R = (+)$. Inną liczbą leżącą między L i R jest $d = (+-+-)$. Zgodnie z Twierdzeniem 2 liczba $L|R$ jest przedziałem początkowym liczby d.

Przykład 11
Niech L będzie zbiorem wszystkich liczb surrealnych postaci $(\underbrace{+++\cdots+++}_{n})$, $n\in\mathbb{N}$, a $R=\{(\underbrace{+++\cdots}_{\omega})\}$ zbiorem jednoelementowym. Liczbą spełniającą warunki Twierdzenia 2 jest liczba $c=(\underbrace{+++\cdots}_{\omega}-)$.

Twierdzenie 3 ([7], s. 8)
Każdą liczbę surrealną a, której długość wynosi α, możemy przedstawić jako $L|R$, gdzie wszystkie elementy $L\cup R$ mają długość mniejszą niż α.

Zbiory L i R powstają w następujący sposób: Do zbioru L należą wszystkie przedziały początkowe liczby a, które są mniejsze od liczby a. Analogicznie, do zbioru R należą wszystkie przedziały początkowe liczby a, które są większe od liczby a. Takie przedstawienie liczby a nazywamy jej *kanoniczną reprezentacją.*

Przykład 12
Niech $a=(++-+--+)$ oraz L będzie zbiorem wszystkich przedziałów początkowych mniejszych od a, zaś R zbiorem wszystkich przedziałów początkowych większych od a:

$$L=\{(),(+),(++-),(++-+--)\}, R=\{(++),(++-+),(++-+-)\}.$$

Wówczas $a=L|R$. Liczbę a możemy również przedstawić w postaci

$$a=\{(++-+--)\}|\{(++-+-)\}.$$

Zanim przejdziemy do definicji działań, konieczne będzie przyjęcie kilku oznaczeń i konwencji. Jeśli $a=L|R$ jest kanoniczną reprezentacją liczby a, to dowolny element zbioru L oznaczamy przez a^L, natomiast dowolny element zbioru R oznaczamy przez a^R.
Oznaczmy również pustą sekwencję () przez 0 oraz sekwencję (+) przez 1.
Przyjmujemy także: $\{c+\emptyset\}=\emptyset=\{\emptyset+d\}$, gdzie c i d są dowolnymi liczbami surrealnymi.

Definicja 13 ([7], s. 13)
Niech a i b będą liczbami surrealnymi. *Sumą* liczb a i b nazywamy liczbę:

$$a+b=_{df}\{a^L+b,a+b^L\}|\{a^R+b,a+b^R\}.$$

Przykład 13
Zgodnie z definicją dodawania otrzymujemy:

$$0+0=\emptyset|\emptyset+\emptyset|\emptyset=\{\emptyset+0,0+\emptyset\}|\{\emptyset+0,0+\emptyset\}=\emptyset|\emptyset=0,$$
$$1+0=\{0\}|\emptyset+\emptyset|\emptyset=\{0+0,1+\emptyset\}|\{\emptyset+0,1+\emptyset\}=\{0\}|\emptyset=1=(+),$$
$$1+1=\{0\}|\emptyset+\{0\}|\emptyset=\{0+1,1+\emptyset\}|\{\emptyset+1,1+\emptyset\}=\{1\}|\emptyset=\{(+)\}|\emptyset=(++).$$

Liczbę $(++)$ oznaczamy jako 2.

W ten sam sposób dodajemy również:
$1+\omega=\{0\}|\emptyset+\{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}|\emptyset=\{0+1,1+1,2+1,\ldots,n+1,\ldots,\omega\}|\emptyset=$
$=\{1+0,1+1,1+2,\ldots,1+n,\ldots,\omega\}|\emptyset=\{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}|\emptyset+\{0\}|\emptyset=\omega+1.$

Definicja 14 ([7], s. 16)
Niech a będzie liczbą surrealną. *Liczbą przeciwną* do liczby a jest liczba powstała przez zmianę wszystkich znaków w zbiorze wartości liczby a z plusa na minus i odpowiednio z minusa na plus. *Liczbą przeciwną* do a oznaczamy $-a$.

Przykład 14
Niech $a=(+++---+)$. Liczbą przeciwną do a jest liczba $-a=(---+++-)$.

Definicja 15 ([7], s. 17)
Niech a i b będą liczbami surrealnymi. *Iloczynem liczb* a i b nazywamy liczbę:

$$ab =_{df} \{a^Lb+ab^L-a^Lb^L, a^Rb+ab^R-a^Rb^R\}|\{a^Lb+ab^R-a^Lb^R, a^Rb+ab^L-a^Rb^L\}.$$

Tak zdefiniowane liczby surrealne, wraz porządkiem oraz działaniami dodawania i mnożenia, okazują się mieć bardzo porządne własności. Okazuje się bowiem, że prawdziwe jest poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 4 ([7], s. 19, 22)
Liczby surrealne, wraz z działaniami sumy i mnożenia oraz z porządkiem na tych liczbach, tworzą ciało uporządkowane.

4. Podklasy liczb surrealnych

Ostatnia część pracy poświęcona będzie wskazaniu pewnych podklas liczb strukturalnych, zawierających zarówno liczby rzeczywiste, jak i liczby porządkowe. Zaczniemy od najprostszych struktur, dzięki nim będziemy mogli wskazać takie liczby surrealne, które będą odpowiadałyby liczbom rzeczywistym.

Twierdzenie 5 ([7], s. 27-28)
Liczba naturalna n *ma postać* $(\underbrace{+++\cdots}_{n})$.
Ujemna liczba całkowita $-n$ *ma postać* $(\underbrace{---\cdots}_{n})$.

Punktem wyjścia konstrukcji liczb rzeczywistych są zazwyczaj liczby całkowite. W tradycyjnym podejściu dzięki nim buduje się liczby wymierne, a w dalszej kolejności liczby rzeczywiste. W przypadku liczb surrealnych jest inaczej. Nie konstruuje się liczb wymiernych, lecz jedynie pewien ich podzbiór. Liczby diadyczne, bo o nich tu właśnie mowa, są jednak (podobnie jak ma to miejsce w przypadku liczb wymiernych) gęste w uporządkowanym ciele liczb rzeczywistych. Mogą zatem posłużyć do konstrukcji tychże liczb.

Definicja 16
Liczbą diadyczną nazywamy liczbę postaci $\frac{a}{2^n}$, gdzie $a\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$.

Twierdzenie 6 ([10], s. 9)
Zbiór liczb diadycznych jest gęsty w $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$*, tzn.*

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\exists_{a\in\mathbb{Z}}\exists_{n\in\mathbb{N}}\ x < y \Rightarrow x < \frac{a}{2^n} < y.$$

Każdą liczbę surrealną o skończonej długości można można jednoznacznie utożsamić z pewną liczbą diadyczną.
Mając daną liczbę surrealną d, stosujemy następujący algorytm szukania odpowiadającej jej liczby diadycznej:
Niech $l(d) = m+n$, gdzie m jest liczbą znaków, które w ciągu d są na jego początku takie same. Wówczas

$$d = \sum_{i=0}^{m+n-1} b(i),$$

gdzie $b(i)$ zdefiniowane jest w sposób następujący:
$b(i) = 1$, jeżeli $i < m$ oraz $d(i) = +$;
$b(i) = -1$, jeżeli $i < m$ oraz $d(i) = -$;
$b(i) = \frac{1}{2^{(i-m+1)}}$, jeżeli $i \geq m$ i $d(i) = +$;
$b(i) = -\frac{1}{2^{(i-m+1)}}$, jeżeli $i \geq m$ i $d(i) = -$.

Przykład 15
Niech $d = (++-+--)$. Wówczas $l(d) = 6$ oraz $m = 2$, $n = 4$. Na mocy powyższego algorytmu otrzymujemy $b(0) = 1$, $b(1) = 1$, $b(2) = -\frac{1}{2}$, $b(3) = +\frac{1}{4}$, $b(4) = -\frac{1}{8}$, $b(5) = -\frac{1}{16}$. Stąd dostajemy liczbę:

$$d = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16} = \frac{25}{16},$$

a liczba ta jest oczywiście liczbą diadyczną.

Mając z kolei daną liczbę diadyczną, odpowiadającej jej liczby surrealnej szukamy, stosując następujący sposób:
Wystarczy ograniczyć się do liczb z przedziału $(0, 1)$, gdyż pozostałe będą konstruowane poprzez dodanie na początek odpowiedniej liczby plusów (w przypadku liczb dodatnich większych bądź równych 1) lub poprzez odwrócenie znaków (w przypadku liczb ujemnych). Niech zatem d będzie liczbą diadyczną i $d \in (0, 1)$. Każdą taką liczbę można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$d = \frac{m}{2^n}, \quad \text{gdzie} \quad m < 2^n \text{ oraz } m \text{ jest nieparzystą liczbą całkowitą,}$$

a tym samym w postaci $1 - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \pm \cdots \pm \frac{1}{2^n}$. Wystarczy teraz pozostawić z tego wyrażenia wyłącznie znaki, poprzedzając je dodatkowym plusem. W ten sposób otrzymamy ciąg odpowiadający szukanej liczbie surrealnej. Pokazuje to poniższy przykład:

Przykład 16
Niech $d = \frac{25}{32}$. Wówczas

$$d = \frac{32 - 16 + 8 + 4 - 2 - 1}{32} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}.$$

Otrzymujemy zatem liczbę surrealną $(+-++--)$.

Przechodzimy teraz do wyróżnienia w klasie liczb surrealnych takich liczb, które możemy utożsamiać z liczbami rzeczywistymi.

Definicja 17 ([7], s. 33)
Rzeczywistą liczbą surrealną nazywamy taką liczbę surrealną a, która ma albo skończoną długość (jest liczbą diadyczną), albo spełnia oba poniższe warunki:

1. ma długość ω
2. jest taką sekwencją plusów i minusów, w której nie istnieje miejsce, od którego byłyby w tej sekwencji same plusy lub same minusy. Innymi słowy - ciąg ten nigdy się nie stabilizuje, co można również zapisać w postaci następującego warunku:

$$\forall_{n_0}\exists_{n_1,n_2}\ n_1 > n_0 \wedge n_2 > n_0 \wedge a(n_1) = + \wedge a(n_2) = -.$$

Zbiór tak zdefiniowanych obiektów okazuje się być zamknięty na działania dodawania i mnożenia oraz operację elementu odwrotnego (spełnia więc aksjomaty podciała ciała liczby surrealnych). Co więcej, dowolny, niepusty i ograniczony z góry zbiór liczb rzeczywistych surrealnych ma kres górny. Prawdziwe jest zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7
Rzeczywiste liczby surrealne tworzą ciało uporządkowane w sposób ciągły.

Liczby te są zatem izomorficzne z dowolnym ciałem liczb rzeczywistych (por. [2], s. 23–24). Ale liczby surrealne to jednak nie tylko liczby rzeczywiste. Wśród nich wyróżnia się również wiele innych obiektów. Istotną rolę odgrywają te, które można utożsamiać z liczbami porządkowymi.

Definicja 18 ([7], s. 41)
Liczbę surrealną a, której długość wynosi α, spełniającą warunek

$$a : \alpha \mapsto \{+\},$$

nazywamy *porządkową liczbą surrealną.*

Ponieważ liczby te należą do ciała liczb surrealnych, to oczywistym jest, że dodawanie ich i mnożenie spełnia między innymi warunek przemienności. Działania na tych liczbach nie zawsze dają zatem taki sam wynik jak dodawanie i mnożenie tradycyjnych liczb porządkowych. Co ciekawe, prawdziwe jest jednak następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8 ([7], s. 42; [11] s. 55–58)
Niech α, β będą dowolnymi liczbami porządkowymi. Wówczas

$$\alpha + \beta = \alpha \oplus \beta,$$

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \odot \beta,$$

gdzie $+$ i $\cdot$ są sumą i iloczynem liczb surrealnych zdefiniowanymi w definicji 13 i 15, zaś $\oplus$ i $\odot$ są sumą naturalną i produktem naturalnym liczb porządkowych zdefiniowanymi w definicji 8.

Co więcej, na porządkowych liczbach surrealnych można wykonywać różne inne działania. Pokazuje to poniższy przykład:

Przykład 17 ([11], s. 61–64)

- $\omega - n = (\underbrace{+++\cdots}_{\omega}\underbrace{---\cdots}_{n});$
- $\frac{\omega}{2} = (\underbrace{+++\cdots}_{\omega}\underbrace{---\cdots}_{\omega});$
- $\frac{1}{\omega} = (\underbrace{+---\cdots}_{\omega});$
- $\frac{2}{\omega} = (\underbrace{+---\cdots}_{\omega}+);$
- $\sqrt{\omega} = (\underbrace{+++\cdots}_{\omega}\underbrace{---\cdots}_{\omega^2}).$

W uzasadnieniu powyższych równości pokazuje się, że, korzystając z działań na liczbach surrealnych, otrzymujemy:

- $\omega - n + n = \omega;$
- $\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \cdot \omega$, lub $2 \cdot \frac{\omega}{2} = \omega$, lub $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega;$
- $\frac{1}{\omega} \cdot \omega = 1;$
- $\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} = \frac{2}{\omega};$
- $\sqrt{\omega} \cdot \sqrt{\omega} = \omega.$

W powyższym tekście przedstawione zostały wyłącznie podstawowe informacje na temat liczb surrealnych. Do tej pory stały się one przedmiotem o wiele większej ilości analiz, niż ma to miejsce w tym artykule (najnowsze wyniki dotyczące liczb surrealnych można odnaleźć w [5],[6]). Własności tych liczb powodują, że badanie ich może przynieść wiele interesujących wyników, dotyczących nie tylko liczb surrealnych samych w sobie, ale również innych matematycznych obiektów, jak ciała uporządkowane czy liczby porządkowe.

Literatura

[1] A. Błaszczyk, S. Turek, *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa, 2007.

[2] P. Błaszczyk, *O ciałach uporządkowanych*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 4 (2012), 15-30.

[3] J. Conway, *On Numbers and Games*, AK Peters, Massachusetts, 2001.

[4] J. Conway, R. Guy, *Księga liczb*, WNT, Warszawa, 2004.

[5] L. van den Dries, P. Ehrlich, *Fields of surreal numbers and exponentiation*, Fund. Math. 167 (2001), 173-188.

[6] P. Ehrlich, *The Absolute Arithmetic Continuum and the Unification of all Numbers Great and Small*, Bulletin of Symbolic Logic 18 (2012), 1-45.

[7] H. Gonshor, *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[8] M. Henle, *Which Numbers are Real?*, The Mathematical Association of America, Washington, 2012.

[9] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa, 1976.

[10] D. Mazur, *Liczby rzeczywiste jako podciało liczb surrealnych*, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, Kraków, 2013.

[11] S. Przybyło, *Liczby porządkowe jako podstruktura liczb surrealnych*, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, Kraków, 2013.

[12] H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa, 1973.

[1] *Instytut Matematyki*
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków,
E-mail: przybyloslawek@gmail.com

Przysłano: 05.06.2014; publikacja on-line: 29.09.2014.